HOLOSMOS



# La sphère en tant que surface de Riemann

12 août 2019

# Table des matières

# 1. De quoi il s'agit

Ce tutoriel au sujet bien exotique va tenter d'explorer en partie un objet fascinant par sa simplicité et sa grande profondeur : la sphère $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$.

C'est un objet que l'on rencontre très facilement, et pourtant, on étudie assez peu les transformations régulières de cette sphère.

Nous tâcherons de donner des outils performants pour étudier $\mathbf{S}^2$. Nous utiliserons pour cela une identification avec la sphère de Riemann : $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Les nombres complexes et les résultats analytiques les concernant seront centraux dans cette étude.

## 2. À qui s'adresse ce contenu ?

Ce contenu un peu plus poussé nécessite au préalable quelques connaissances en topologie et en analyse complexe. Même si les notions réutilisées seront rappelées, le lecteur devra être suffisamment à l'aise avec pour les aborder.

# 3. Outils d’analyse complexe

Nous allons lister ici les principaux résultats et définitions qui nous servirons par la suite. Ceci devrait être connu du lecteur, ou du moins accessible.

### 3.0.1. Motivations

L’intérêt de faire de la topologie, dans ce contexte, est d’avoir des outils pour faire de l’analyse. Vous savez déjà certainement comment faire de l’analyse sur la droite réelle (continuité, dérivabilité, intégration), on aimerait étendre ces notions à des situations plus générales. En particulier, on va essayer d’avoir toutes ces notions sur la sphère $\mathbf{S}^2$ (a priori très éloignée de la droite réelle).

Ainsi, la topologie permet de généraliser très facilement la notion de continuité et dans les cas métriques (c’est-à-dire quand on a une notion de distance) la notion de convergence.

Pour ce qui est de l’intégration et de la dérivabilité (qui deviendra de la différentiabilité, ou holomorphie en termes complexes), il faudra se donner des outils supplémentaires de calcul différentiel.

Dans la première partie, on dégagera la notion de continuité et d’homéomorphisme. La partie suivante nous donnera les outils de calcul différentiel et les prochains chapitres les réutiliseront pour analyser plus finement la structure de notre sphère.

## 3.1. Topologie de $\mathbf{C}$

Avant de commencer à faire de l’analyse, on va se donner des outils de topologie, auparavant appelée *analysis situs* (sans grand hasard). Il va donc s’agir de munir  d’une « topologie », c’est-à-dire un ensemble de parties « ouvertes » de  que nous définirons par les « voisinages » de .

Il y a plusieurs façons équivalentes de définir une topologie, ici j’ai fait le choix des voisinages mais on peut définir une topologie par :

1. Ses ouverts ;
2. ses fermés ;
3. ses voisinages.

Même si je vais rappeler quels sont ces ensembles pour $\mathbf{C}$, il ne s’agira pas d’un cours de topologie. Ainsi, s’il vous manque des notions, vous devriez essayer de les combler avant de vous attaquer à ce tutoriel. On ne justifiera pas non plus que la structure donnée est bien une topologie mais muni de la topologie qui sera présentée,  est un espace topologique.

## 3.1.1. Voisinage, ouvert, fermés de

### 3.1.1.1. Voisinages

Soit $a \in$. Un voisinage de $a$, $V_a$, est une partie de  telle que :

$$\exists r > 0,\ V_a \supset B_a(r) = \{z \in \ | |z - a| < r\}.$$

On appelle $B_a(r)$ la boule ouverte centrée en $a$ et de rayon $r$. Géométriquement, il s'agit du disque (sans sa frontière) centré en $a$ et de rayon $r$.

Sur l'image qui suit, un voisinage de $a \in$ a été représenté. La zone la plus foncée représente une boule ouverte centrée en $a$ *contenue* dans $V_a$ ce qui permet bien de qualifier ce dernier de *voisinage de* $a$.

`http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/`

FIGURE 3.1. – Un exemple de voisinage de la droite complexe

#### 3.1.1.1.1. Exemples

Deux exemples simples et importants à retenir :

1. $B_a(r)$ est un voisinage de $a$ pour tout $r > 0$ ;
2. $\{a\}$ n'est pas un voisinage de $a$.

### 3.1.1.2. Ouverts

Une partie de  est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points. C'est-à-dire, $U \subset$ est un ouvert si, et seulement si,

$$\forall x \in U, \exists r > 0,\ U \supset B_x(r).$$

#### 3.1.1.2.1. Exemples

1. $\mathbf{C}$ et $\emptyset$ sont deux ouverts ;
2. $B_a(r)$ est un ouvert pour tous $a \in$ et $r > 0$.

`http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/`

FIGURE 3.2. – Les boules ouvertes sont des ouverts

#### 3.1.1.3. Fermés

Une partie de  est dite *fermée* si son complémentaire est une partie ouverte.

Il faut faire attention à ne pas croire qu'une partie ne peut pas être ouverte *et* fermée.

##### 3.1.1.3.1. Exemples

1.  et $\emptyset$ sont deux fermés ;
2. Les boules fermés centrées en $a$ et de rayon $r$ définies par :

$$\bar{B}_a(r) = \{z \in \ | |z - a| \ \leq r\}$$

sont fermées.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/

FIGURE 3.3. – Une boule fermée

La notation $\partial \bar{B}_a(r)$ est explicitée dans ce qui suit.

#### 3.1.1.4. Adhérence et intérieur

Soit $A \subset$. L'adhérence de $A$, notée $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant $A$. Son intérieur, noté $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$.

Ainsi, on a les relations d'inclusions suivantes :

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}.$$

On définit la *frontière* de $A$ par la différence : $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$. Ainsi, une partie est fermée si elle contient tous les points de sa frontière et est ouverte si elle n'en contient aucun.

### 3.1.2. Convergence, continuité

#### 3.1.2.1. Espace séparé et convergence

On dit qu'un espace topologique est *séparé* si deux points distincts admettent deux voisinages disjoints. C'est bien le cas pour  : étant donnés $x, y \in$ distincts et en prenant deux boules centrées en $x$ et $y$ et de rayons inférieurs à la moitié de la distance entre $x$ et $y$ on obtient deux voisinages disjoints de $x$ et $y$.

Considérons une suite $A = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres complexes. On dit que la suite $A$ converge vers $a$ si pour tout voisinage, $V_a$, de $a$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\{a_n \,|\, n \geq n_0\} \subset V_a.$$

Si on choisit des boules ouvertes comme voisinages de $a$, on retrouve la notion de convergence usuelle.

Comme  est un espace séparé, si $A$ converge vers $a$, alors elle converge uniquement vers $a$ et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

la limite de cette suite.

#### 3.1.2.2. Continuité

Soit $f$ :→. On dit que $f$ est continue si pour tout $a \in$ et pour tout voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$, $f^{-1}(V_{f(a)})$ (l'image réciproque de $V_{f(a)}$ par $f$) est un voisinage de $a$.

De même, en remplaçant les voisinages de $f(a)$ par des boules ouvertes centrées en $f(a)$, on retrouve la notion de continuité usuelle.

On peut astreindre $a$ à un ensemble plus petit. On définit alors la continuité comme étant sur cet ensemble.

#### 3.1.2.3. Homéomorphisme

Un homéomorphisme $f : E \to F$ entre deux espaces topologiques (par exemple $E = F =$) est une bijection continue et de réciproque continue.

En particulier, $f$ envoie ouvert sur ouvert. En effet, si $U_F$ est un ouvert de $F$, alors en particulier c'est un voisinage de chacun des points de $U_F$ et donc comme $f^{-1}(U_F)$ vérifie également cette propriété (par continuité) alors $f^{-1}(U_F)$ est ouvert. De même, $f(U_E)$ est un ouvert de $F$ pour tout ouvert $U_E$ de $E$.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/

Figure 3.4. – Un exemple d'homéomorphisme

### 3.1.3. Compacité

La dernière notion que nous définirons est celle de compacité.

Une partie $A$ de  est compacte si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $A$, il existe une sous-suite convergente dans $A$.

On peut montrer que dans  les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

On utilisera également l'autre caractérisation des parties compactes : $A \subset$ est compacte si, et seulement si, de tout recouvrement $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $A$ par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini : $(U_{\varphi(n)})_{n\leq N<\infty}$.

## 3.2. Analyse complexe élémentaire

On va se munir de quelques résultats classiques d'analyse complexe. Je vais tout de même définir les termes « holomorphe » et « analytique ».

### 3.2.1. Fonction holomorphe et analytique

Soit $f : V \to$ définie sur un voisinage $V$ de $a \in$. $f$ est dite *holomorphe* en $a$ si la limite :

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

existe et est finie. On appelle alors ce nombre *le nombre dérivé de $f$ en $a$*.

Nous verrons que contrairement à l'analyse réelle, c'est une propriété très forte.

$f$ est dite *analytique* en $a$ s'il existe $r > 0$ (tel que $B_a(r) \subset V$) et une suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall x \in B_a(r),\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n.$$

On appelle *série entière* de variable $x$ une série formelle de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$.

On remarquera que si $f$ est analytique en $a$ alors elle est infiniment dérivable en $a$.

### 3.2.2. Formule intégrale de Cauchy

On va se donner ce résultat d'analyse complexe pour la suite du tutoriel.

Soit $U$ un ouvert connexe[1] de . Si $f$ est holomorphe sur $U$ alors $f$ est analytique sur $U$.

De plus, pour tout $z \in U$, en notant $r$ la distance euclidienne de $z$ à $-U$[2], on a :

$$\forall h \in B_0(r),\ f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall \rho \in ]0,r[,\ a_n = \frac{1}{2\boldsymbol{i}\pi} \int_{C_p} \frac{f(x)}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

où $C_p$ est le cercle orienté positivement de centre $z$ et de rayon $\rho$ inclus dans $U$.

En particulier, si $f :\to$ est holomorphe sur  tout entier, alors elle possède un développement en série entière valable pour tout $z \in$.

---

Maintenant que nous avons ces outils élémentaires d'analyse et de topologie, nous pouvons nous attaquer pleinement à l'étude de la sphère $\mathbf{S}^2$.

1. Cela signifie que toute application $f : U \to \{0,1\}$ continue est constante. Intuitivement, il s'agit de dire que $U$ est formé d'un seul bloc.
2. En clair,

$$r = d(z, \mathbf{C} - U) = \inf_{x \in \mathbf{C}-U} |z - x|.$$

# 4. Projection stéréographique et compactification

Maintenant que nous avons des outils d'analyse complexe, comment les appliquer à notre sphère ? Le rôle central dans la réponse que je vais vous fournir ce sera celui de la *projection stéréographique*. Il faut la penser comme un pont entre les nombres complexes et la sphère $\mathbf{S}^2$.

Cette projection doit servir à :

— préserver les propriétés de la sphère (compacité par exemple) ;
— tranposer la notion d'holomorphie pour pouvoir faire du calcul (intégration par exemple).

Rien qu'avec ces deux conditions on se sait que notre projection devra respecter les faits suivants :

— c'est une bijection et même un homéomorphisme (pour préserver les propriétés topologiques) ;
— comme $\mathbf{C}$ n'est pas compact mais la sphère l'est, il faudra faire un découpage de la sphère (ce découpage se fera en deux morceaux que l'on appellera « cartes ») ;[3]
— le passage d'un morceau à l'autre (on verra dans le découpage que les morceaux se chevauchent), doit se faire de manière régulière pour garder un calcul différentiel possible (sinon vous auriez une fonction qui serait holomorphe, ou non, en dépendance du morceau utilisé pour le domaine et du morceau utilisé pour le codomaine (l'ensemble des images)).

Cela fait beaucoup de travail. La première étape est d'obtenir un homéomorphisme, c'est ce dont traite ce chapitre. Il faudra attendre le chapitre suivant pour s'intéresser aux propriétés de régularité.

## 4.1. Identification de $\mathbf{S}^2$ à $\hat{\mathbf{C}}$

La partie cruciale de ce tutoriel est ici. Il va s'agir d'identifier proprement deux objets *a priori* distincts. Nous commencerons par poser $\hat{\mathbf{C}}$ de telle sorte que la sphère $\mathbf{S}^2$ soit en bijection avec cet objet, puis nous justifierons le fait que cette bijection est en fait un homéomorphisme.

3. La suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $\mathbf{C}$ donc ce dernier n'a pas la propriété de compacité. Pourtant, la sphère $\mathbf{S}^2$ est compacte (puisque c'est un fermé borné de $\mathbf{R}^3$). Comme l'image d'un homéomorphisme respecte la compacité (l'image par une application continue d'un compact est encore compacte) il faut soit rendre la sphère non compacte en la découpant, soit rendre $\mathbf{C}$ compact. La première option est plus facile à manier par la suite pour se donner des outils de calcul différentiel mais la seconde option est topologiquement très intéressante : c'est la compactification d'Alexandrov. On utilisera donc les deux en gardant en tête les « avantages » respectifs : analytiques pour la première et topologiques pour la seconde.

## 4.1.1. La sphère $\mathrm{S}^2$

### 4.1.1.1. Définition classique

La sphère $S\mathbf{S}^2$ est l'ensemble suivant :

$$^2 := \{(x, y, z) \in^3 \quad | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \}.$$

Il s'agit donc bien de la paroi de ce qu'on appelle dans le langage courant la « sphère ». En particulier, elle est centrée en 0 et est de rayon égal à 1.

### 4.1.1.2. Topologie usuelle de la sphère

Par la suite nous mettrons en évidence un homéomorphisme entre la sphère $^2$ et la sphère de Riemann, $\hat{\mathbf{C}}$. Mais pour justifier des propriétés de continuité, il faut munir $^2$ d'une topologie, c'est-à-dire d'un ensemble de parties de $^2$ que nous appellerons les *ouverts* de la sphère $^2$ et qui respectent certains axiomes (permettant d'appeler alors cet ensemble d'ouverts une topologie).

Nous allons donner la topologie la plus évidente de $^2$ : la topologie induite de $^3$ sur $^2$. Nous définirons cette topologie par son système de voisinages et non par les ouverts. Cela est plus simple à définir et parfaitement équivalent. Pour rappel, un ensemble est un ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points. Si ces notions vous paraissent floues, il peut être bon de revenir au chapitre précédent.

**4.1.1.2.1. Voisinages de $^3$** De manière très analogue à la topologie de $\mathbf{C}$, un voisinage de $a \in^3$ est un ensemble $W_a$ contenant une boule ouverte centrée en $a$ et de rayon strictement positif :

$$\exists r > 0, \ W_a \supset \{x \in^3 \ | \, \|x - a\|_2 < r\}$$

où $\|x - a\|_2$ est la norme euclidienne de $x - a$. Si $(u_1, u_2, u_3) = x - a$ alors ce nombre est défini par :

$$\|x - a\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

En d'autres termes, $\|x - a\|_2$ est la *distance euclidienne* entre $x$ et $a$ (c'est-à-dire la longueur du segment reliant $x$ et $a$).

**4.1.1.2.2. Voisinages de $^2$** Soit $a \in^2$ un point de la sphère. Un voisinage $V_a$ de la sphère du point $a$ est une intersection :

$$V_a =^2 \cap W_a$$

où $W_a$ est un voisinage de $a \in^3$ (c'est-à-dire un voisinage de $a$ dans l'espace $^3$).

Il est important de noter que la notion de voisinage de $a$ dépend fortement de l'espace choisi. On vient de définir le voisinage de $a$ lorsqu'on regarde la sphère $^2$ en utilisant les voisinages de $a$ dans l'espace euclidien $^3$.

Sur l'image qui suit, la zone grisée représente un voisinage, $V_a$, de $a$ qui est un point de la sphère $^2$ dont on a gardé qu'un seul hémisphère. Dans cette image, $B_a(r)$ joue le rôle de $W_a$.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/

Figure 4.1. – Un voisinage d'un point de la sphère

### 4.1.2. Projection stéréographique

Considérons $N$ le pôle nord de $^2$, c'est-à-dire le point $(0, 0, 1)$ de $^3$. Il va s'agir de construire la projection stéréographique de pôle $N$, que l'on notera $P_N$.

L'image de $^2 - \{N\}$ par la projection sera $\mathbf{C}$ et l'on identifiera $P_N(N)$ à $\infty$ ce qui nous donnera une application :

$$P_N :^2 \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

On appelle $C\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ **la sphère de Riemann** pour des raisons qui vous sembleront évidentes par la suite.

#### 4.1.2.1. Première étape

On va commencer par les points différents de $N$. Cette construction est très géométrique. Pour un point $p$ de la sphère donné, on va choisir l'intersection de la droite $(Np)$ avec le plan $z = 0$ ; comme le montre cette image :

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1867/

Figure 4.2. – Projection stéréographique

Une fois l'image par cette projection trouvée, il suffit de l'identifier à un point de la droite complexe. Ce qui est très naturel vu que c'est le point d'un plan euclidien.

Donnons l'expression analytique de cette projection. Soit $p = (x, y, z) \in^2$ différent de $N$.

$$P_N(p) = \frac{x + i\boldsymbol{i}y}{1 - z}$$

Vous pouvez vérifier que cette valeur correspond bien à la construction donnée.

De plus, comme la définition de $P_N(p)$ est univoquement définie par $p$, on peut donner la transformation inverse. Soit $u = x + y$ avec $x, y$ réel, alors :

$$P_N^{-1}(u) = \frac{(2x, 2y, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}.$$

#### 4.1.2.2. Deuxième étape

On pose $P_N(N) = \infty$ et $P_N^{-1}(\infty) = N$.

On peut se demander si un tel choix est cohérent. Remarquez tout d'abord que si un point $p \neq N$ de la sphère est très proche de $N$, alors son image par la projection sera de module très grand. En effet, calculons

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \left|\frac{x+y}{1-z}\right|^2$$

on remarque que $z$ vérifie la propriété descriptive de $^2$ : $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ et donc

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \left|\frac{x+y}{1-z}\right|^2 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{x^2+y^2}{\left(1-\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\right)^2}$$

le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\sqrt{1+h}$ étant $1 + h/2 + o(h)$ on obtient :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \left|\frac{x+y}{1-z}\right|^2 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{x^2+y^2}{(1-1+x^2/2+y^2/2)^2} = +\infty.$$

#### 4.1.2.3. Aparté

Vous remarquerez sans doute que la problématique de faire correspondre une sphère à un plan vous est un peu familière. En fait il s'agit de la même problématique que celle rencontrée par les géographes lorsqu'il s'agit de représenter sur une *carte* la Terre.

La méthode présentée ici n'est pas la plus utilisée. Elle a le net avantage d'être conforme : elle respecte les angles. En revanche, les longueurs sont très déformées (un petit segment prêt de $N$ sera beaucoup plus grand que le même segment mais au pôle sud).

Vous pouvez vous demander s'il existe une méthode permettant de *vraiment* dessiner la sphère dans un plan ; c'est-à-dire dans nos termes, avoir un homéomorphisme de $^2$ dans $\mathbf{C}$ et non dans . La réponse à cette question est non. Pour une raison topologique assez simple : la sphère est compacte et le plan ne l'est pas.

Regardez sur l'image qui suit, ce que donnerait la projection stéréographique de la Terre de pôle Nord (le vrai, cette fois-ci) :

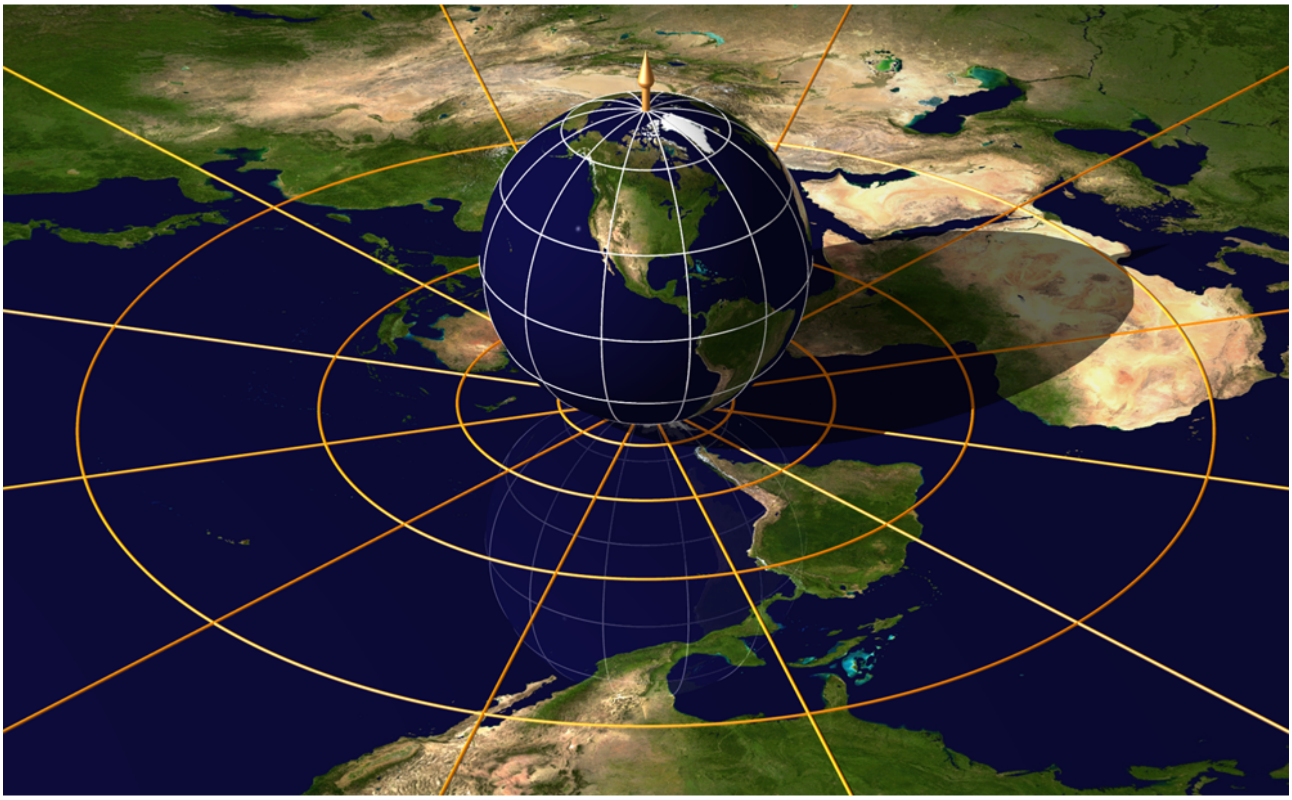

FIGURE 4.3. – Crédit : [Jos Leys](http ://images.math.cnrs.fr/spip.php ?page=image&id_document=5157) - Une projection stéréographique de la Terre

## 4.2. La compactification de $\mathbb{C}$ en $\hat{\mathbb{C}}$

### 4.2.1. La vraie histoire en version courte

Le fait d'adjoindre le point à l'infini, $\infty$, à $\mathbf{C}$ n'est pas un acte anodin.

Il y a une construction précise permettant de dire que $C\hat{\mathbf{C}}S\mathbf{S}$ est en fait un espace compact, le plus petit espace compact contenant $\mathbf{C}$. Le lecteur intéressé pourra se référer à la compactification d'Alexandrov .

### 4.2.2. Un peu plus d'explications

Nous pouvons tout de même nous convaincre que  ainsi construit donne bien lieu à un espace compact. Nous avons déjà une idée de la preuve montrant que $P_N$ est une bijection continue et de réciproque continue entre ${}^2$ et . Ainsi, tout raisonnement sur  se ramène en fait à un raisonnement sur ${}^2$.

On peut maintenant se focaliser sur la question de compacité. En fait c'est immédiat : puisque ${}^2$ est fermé et borné dans ${}^3$, c'est un espace compact.

Ainsi, toute suite à valeurs dans  admet une sous-suite convergente. Par exemple, la suite des entiers naturels, $(n)_{n\in\mathbf{N}}$, qui divergeait dans $\mathbf{C}$ converge maintenant vers $\infty$.

Géométriquement, on voit que la suite des antécédents :

$$\left(P_N^{-1}(n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge vers $N$, c'est-à-dire l'antécédent du point à l'infini de .

### 4.2.3. Explicitation de la topologie de

En guise de conclusion, on va expliciter les ouverts de .

Un ouvert de , $U$ est :

- un ouvert de $\mathbf{C}$ si $U$ ne contient pas $\infty$ ;
- le complémentaire d'un compact de $\mathbf{C}$ dans le cas contraire.

---

Ce qu'il faudra retenir, c'est que $\mathbf{S}^2$ et $\hat{\mathbf{C}}$ sont les mêmes objets. Ainsi quand nous raisonnerons sur $\hat{\mathbf{C}}$ il faudra garder en tête qu'il s'agit d'un raisonnement sur $\mathbf{S}^2$ et réciproquement.

Cela donne donc deux points de vue très complémentaires sur un même objet. Dans la partie suivante, nous verrons pourquoi travailler sur les nombres complexes est si utile.

# 5. Fonctions holomorphes sur la sphère

Nous avons identifié la sphère $\mathbf{S}^2$ à la sphère de Riemann, $\hat{\mathbf{C}}$. Il nous reste maintenant à exploiter une telle identification.

L'intérêt premier d'avoir des nombres complexes réside dans leur rigidité. Les fonctions holomorphes sont très courantes mais sont également très rigides : être holomorphe sur un ouvert est équivalent à être analytique sur cet ouvert.

Ainsi, nous allons profiter de ces propriétés analytiques des nombres complexes pour les appliquer à la sphère $\mathbf{S}^2$ à travers la sphère de Riemann.

Cela nous permettra de montrer un résultat surprenant : l'ensemble des fonctions holomorphes de la sphère de Riemann sont les fractions rationnelles à coefficients complexes, alors que dans le corps des nombres complexes, une fonction holomorphe peut être transcendante, comme c'est le cas pour l'exponentielle.

## 5.1. La sphère en tant que surface de Riemann

Vous l'attendiez probablement depuis le début de ce tutoriel, on peut enfin aborder le sujet des surfaces de Riemann.

### 5.1.1. Surface de Riemann

Formellement, une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1 (1 du fait que l'on va envoyer des morceaux de $\mathbf{S}^2$ dans $\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}$). Cela peut ne pas vous paraître très clair, je vais donc détailler les étapes que l'on va suivre pour montrer que $S\mathbf{S}^2$ est bien une surface de Riemann.

1. On va se rappeler que l'on peut identifier $^2$ à $C\hat{\mathbf{C}}$ ;
2. on va donner deux homéomorphismes que l'on appellera « cartes », entre $-\{0\}$ et $\mathbf{C}$ et entre $-\{\infty\}$ et $\mathbf{C}$ ;
3. on va s'intéresser à l'intersection de ces deux cartes.

La dénomination « carte » n'est pas anodine. Tout comme en géographie, une carte n'est valable que dans une certaine zone (vous n'avez jamais toute la Terre bien dessinée sur une même carte). Ainsi, il faudra se rappeler qu'une carte sert à représenter en partie la sphère $^2$ et non sa totalité. Aussi, le passage d'une carte à l'autre est à étudier pour savoir comment « recoller » l'information.

#### 5.1.1.1. Les deux cartes

Il va s'agir principalement d'étudier les deux fonctions suivantes :

$$\nu_1 : u \mapsto u,\ \nu_2 : u \mapsto 1/u$$

qui ont pour domaines respectifs $-\{\infty\}$ et $-\{0\}$ avec les conventions $1/\infty = 0$ et $1/0 = \infty$.

Vous remarquez bien sûr que $\nu_1$ est un homéomorphisme puisque c'est l'identité. Pour $\nu_2$, il faut reprendre une interprétation géométrique pour se convaincre qu'il s'agit d'un homéomorphisme. En effet, si on regarde l'application :

$$J = P_N^{-1} \circ \nu_2 \circ P_N$$

c'est une application de $^2$ vers elle-même. Comme $P_N$ est un homéomorphisme, la nature de cette application est la même que $\nu_2$.

Cependant, $J$ est en fait une inversion la sphère. C'est-à-dire que le pôle sud passe au nord et le cercle

$$^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

reste invariant.

C'est donc évidemment un homéomorphisme.

#### 5.1.1.2. À l'intersection

Regardons l'image de $\nu_1$ et $\nu_2$ sur l'intersection :

$$(-\{0\}) \cap (-\{\infty\}\ \ ) = \mathbf{C}^*.$$

Vous remarquerez que l'on passe de $\nu_1(\mathbf{C}^*)$ à $\nu_2(\mathbf{C}^*)$ simplement par l'application $u \mapsto 1/u$. Cela montre que les cartes sont bien « holomorphes » puisque le changement de carte $\nu_2^{-1} \circ \nu_1 = \nu_2$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$.

### 5.1.2. Ce que ça signifie

Ce que l'on vient de faire, c'est donner deux cartes de $^2$. Ainsi, on pourra *lire* un point de $^2$ dans au moins l'une des deux cartes. En fait, tous les points sauf les deux pôles nord et sud sont lisibles dans les deux cartes.

Mieux encore, étant donné une voisinage, $V$, suffisamment petit de $^2$ (qui ne contienne pas simultanément les deux pôles, 0 et $\infty$), on peut voir $V$ comme un voisinage de $\mathbf{C}$ par lecture dans l'une des deux cartes.

Ces cartes ne sont pas des applications quelconques, elles respectent la « forme », d'où la dénomination *holomorphe* qui signifie en grec « qui conserve la forme ». On sait qu'elles respectent la forme puisque ce sont des homéomorphismes et le changement de carte est elle-même une application holomorphe.

Ainsi, on pourra travailler sur $^2$ tout comme on travaillait sur $\mathbf{C}$. C'est ce que va approfondir l'extrait suivant.

## 5.2. Fonction holomorphe sur la sphère

Dans la suite de cet extrait, on va considérer une application $f : C\hat{\mathbf{C}} \to$. Évidemment, étudier $f$ sur  ou $S\mathbf{S}^2$ revient au même grâce à la projection stéréographique.

### 5.2.1. Holomorphie sur

On a vu que  « ressemblait » localement à $\mathbf{C}$ par un jeu de cartes. Maintenant que l'on s'est donné une fonction $f$ à une variable dans , on va chercher à analyser cette fonction. Comme on s'intéresse à des comportements locaux (la régularité en est un), on passe par le jeu des cartes pour se ramener au cas complexe connu et très riche.

La situation la plus générale est celle de variétés complexes. La sphère de Riemann en est un cas particulier, mais le lecteur curieux peut par exemple regarder ça ou ça .

---

**Définition**

> $f$ est holomorphe sur , si lue dans les bonnes cartes, elle est holomorphe au sens de $\mathbf{C}$.

---

« lue dans les bonnes cartes » signifie que l'on va composer avec les cartes qui correspondent. De manière plus explicite, on va regarder les ensembles suivants :

$$D_1 = -\{\infty\},\ D_2 = f^{-1}(D_1),\ D_3 = -\{0\},\ D_4 = f^{-1}(D_3)$$

avec bien-entendu $f^{-1}$ au sens ensembliste (puisque $f$ n'est *a priori* pas bijective).

Ainsi, les applications suivantes :

$$x \mapsto f(x) : D_1 \cap D_2 \to D_1 x \mapsto \frac{1}{f(x)} : D_1 \cap D_4 \to D_1 x \mapsto f(1/x) : D_3 \cap D_2 \to D_1 x \mapsto \frac{1}{f(1/x)} : D_3 \cap D_4 \to D_1$$

sont toutes bien définies en tant qu'applications d'une partie de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

On dit que $f$ est holomorphe si toutes ces applications le sont. De même, on dira que $f$ est analytique sur une partie de  si les applications précédentes le sont.

Exemple

Les applications suivantes sont holomorphes sur  :

1. $x \mapsto c$ avec $c \in \mathbf{C}$ ; 2. $x \mapsto x$ ; 3. $x \mapsto 1/x$ ; 4. $x \mapsto x^2 + 1/x$.

Cependant les applications suivantes ne sont pas holomorphes sur  :

1. sin ; 2. exp ; 3. $x \mapsto \infty$.

À titre d'exercice, vous pouvez essayer de montrer ce que je viens de dire.

Résultat central

Le résultat qui mérite ce tutoriel et qui montre une grande rigidité de la structure de  est le suivant :

—

**Théorème**

-> Les applications holomorphes de  sont les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{C}$. <-

—

Pour montrer ce résultat, on utilisera le résultat suivant qui est une généralisation de celui dans $\mathbf{C}$ :

—

**Théorème**

-> Soit $f$ une application analytique sur une région, $R$, de . S'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de $R$, dont une infinité sont différents deux à deux, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(z_n) = 0$ alors $f$ est identiquement nulle sur $R$. <- —

On va également définir la notion de multiplicité :

— **Définition**

-> On appelera multiplicité de $f(a) = c$, le plus petit nombre $k$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. <-

—

On peut alors montrer le lemme suivant :

—

**Lemme**

-> Toute application $f :\to$ holomorphe et non constante atteint chaque valeur $c \in$ un nombre fini de fois. <-

**Démonstration**

Soit $z \in$ et supposons $f(z) = c$. Il existe alors un voisinage $N_z$ de $z$ tel que $f$ ne prend pas la valeur $c$ sur $N_z - \{z\}$ d'après le théorème précédent (sinon $f - c$ serait identiquement nulle).

Soit $(z_i)_{i\in\mathbf{n}}$ une suite de nombres complexes telle que $f(z_j) = c$ pour tout $j \in \mathbf{N}$. Par compacité, ne peut être recouvert que d'un nombre fini de voisinages $N_{z_j}$ pour $j \in \mathbf{N}$, ce qui conclut.

—

On va alors montrer le théorème :

Soit $f$ est une fraction rationnelle. Si les racines de $f$ sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de multiplicités respectives $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et si les pôles de $f$ sont $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ d'ordres respectifs $q_1, q_2, \ldots, q_m$ alors pour un certain $c \in \mathbf{C}$,

$$f(z) = c \left( \prod_{k=1}^{p} (z - \alpha_k)^{r_k} \right) \left( \prod_{k=1}^{m} (z - \beta_k)^{-q_k} \right).$$

Ainsi $f$ est bien holomorphe sur  puisque produit d'applications holomorphes.

Maintenant supposons que $f :\to$ est holomorphe. Par le corollaire précédent, il existe un nombre fini de pôles de $f$ dans $\mathbf{C}$, disons $\beta_1, \ldots, \beta_s$ d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_s$. Ainsi l'application

$$z \mapsto g(z) = (z - \beta_1)^{n_1} (z - \beta_2)^{n_2} \ldots (z - \beta_s)^{n_s} f(z)$$

est holomorphe (au sens de $\mathbf{C}$) sur $\mathbf{C}$. Donc $g$ a un développement de Taylor valide pour tout $z \in \mathbf{C}$ :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Or $g$ est également holomorphe en l'infini (puisque $f$ l'est) et donc par définition d'holomorphe (au sens de ) en $\infty$, $(g \circ \nu_2)$, de développement :

est holomorphe en 0. Mais $g \circ \nu_2(z)$ ne peut pas être égal à l'infini sur tout voisinage de 0, sinon elle ne serait pas holomorphe (l'application $z \mapsto \infty$ n'est pas holomorphe). Donc $a_j = 0$ pour $j$ assez grand et donc $g$ est un polynôme et $f$ est une fraction rationnelle.

---

On cloture ainsi la partie analytique de ce tutoriel.

Ce qu'il faudra en retenir, c'est que la propriété « être holomorphe » pour une fonction dans $\hat{\mathbf{C}}$ est encore plus forte que celle dans $\mathbf{C}$ alors que les hypothèses n'ont pas été beaucoup accrues (en apparence seulement).

Les fractions rationnelles ont des propriétés très intéressantes : par exemple, un nombre fini de pôles de racines et de points fixes. Dans des études de systèmes dynamiques, cela se révèle d'une grande importance.

Les très fameux ensembles de Julia sont étudiés dans ce contexte et font encore objet de beaucoup d'efforts de recherche. Cela fera, peut-être, l'objet d'un prochain tutoriel ?

---

# 6. Ouverture

Tout ceci ne s'arrête pas là. La sphère de Riemann est également identifiable à un autre objet algébrique très riche : la droite projective complexe, notée $\mathbf{CP}^1$ ou $\mathbf{P}(\mathbf{C}^2)$. C'est alors encore une nouvelle source de résultats fondamentaux et simples. On peut par exemple montrer qu'il existe un unique isomorphisme qui échange deux triplets.

On peut également s'intéresser à la sphère $\mathbf{S}^2$ du point de vue de la topologie différentielle. La considérer comme une variété différentielle, chez les réels cette fois-ci, et en déduire des résultats également très variés. On peut de cette manière montrer le très célèbre théorème de d'Alembert-Gauss, par des outils de topologie différentielle très simples et sans recours à de l'analyse complexe.

# 7. Références

Pour des références en topologie générale et analyse complexe, le lecteur peu à l'aise avec ces notions peu se rediriger vers les polycopiés (très complets) suivants :

- Topologie général et calcul différentiel de F. Paulin ;
- Analyse complexe de M. Audin.

En guise d'approfondissements, le lecteur intéressé peut se diriger vers les livres suivants :

- *Complex Functions* de Jones et Singerman
- *Dynamics in One Complex Variable* de Milnor