

Queste de savoir

La saga des nombres - Au-delà du réel

6 septembre 2021

Table des matières

Introduction	3
I. Des mathématiciens pleins d'imagination	6
I.1. Où sont-ils?	7
I.1.1. Une torture mentale	7
I.1.2. Cachez ces nombres que je ne saurais voir	9
I.1.3. Sortons du cadre...	10
I.1.4. Complexifions tout ça...	12
I.1.4.1. Représentations géométriques	14
I.2. Additionnons, multiplions...	16
Introduction	16
I.2.1. Additionnons	16
I.2.1.1. Soustrayons	17
I.2.2. Multiplions	18
I.2.2.1. Divisons	20
I.2.3. Les réels, des complexes comme les autres?	21
Conclusion	22
I.3. Le sacre des complexes	24
Introduction	24
I.3.1. La forme trigonométrique	24
I.3.2. La forme exponentielle	26
I.3.3. Le défilé des formules	28
I.3.3.1. La plus belle des formules	28
I.3.3.2. La formule la plus mystérieuse	28
Contenu masqué	30
II. Au-delà de l'imaginaire	31
II.1. Le dernier des nombres?	32
Introduction	32
II.1.1. Les racines de l'unité	32
II.1.1.1. La racine carrée	32
II.1.1.2. La racine cubique	33
II.1.1.3. Les polygones constructibles	34
II.1.2. Le théorème fondamental de l'algèbre	35

Conclusion	37
Contenu masqué	37
II.2. Ajoutons une dimension	38
II.2.1. Can you multiply triples?	38
II.2.2. On a perdu la commutativité!	39
II.3. Voyage dans la quatrième dimension	43
II.3.1. Pourquoi quatre?	43
II.3.2. La postérité des quaternions	44
II.3.3. Et après?	47
III. La suite du voyage...	49
III.1. Réflexions mathématiques	50
III.1.1. Qu'est-ce qu'un nombre?	50
III.1.2. La beauté des mathématiques	52
III.1.3. Le début d'un long voyage	53
III.2. Annexe	55
Introduction	55
III.2.1. Troisième degré	55
III.2.2. Des racines imaginaires	56
Conclusion	58
Conclusion	59

Introduction

Qu'est-ce qu'un nombre?

Drôle de question me direz-vous... tout le monde sait ce qu'est un nombre.

D'accord, mais ça ne répond pas à ma question. En fait, il est assez difficile de donner une définition précise au mot *nombre*.

Réfléchissons un peu:

- nous connaissons les **nombre entiers**, qui nous servent à compter sur nos doigts: 0, 1, 2...
- avec ces nombres, nous avons pu faire des additions et des soustractions. Mais certaines soustractions se sont révélées impossibles, comme $2 - 3$ par exemple.
- nous avons alors inventé les **nombre négatifs**: $-1, -2...$
- avec ces nombres, nous avons aussi fait des multiplications et des divisions. Mais certaines divisions se sont révélées impossibles, comme $2 \div 3$ par exemple.
- nous avons alors inventé les **nombre rationnels**: $0, 5, 1, 234, 2/3...$ Ce sont des nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule, comme $0,23$, ou avec une infinité de chiffres mais qui se répètent, comme $0,333...$ ou $1,148148148...$ Tous ces nombres peuvent s'écrire sous forme de fraction.
- puis nous avons inventé deux autres opérations: les puissances et les racines. Mais certaines racines, comme $\sqrt{2}$, se sont révélées ne pas être des nombres rationnels (impossibles à écrire sous forme de fraction).
- nous avons alors inventé les **nombre irrationnels**: $\sqrt{2}, \pi, e...$

Voilà donc tous les nombres que vous connaissez. Ces nombres constituent ce qu'on appelle les **nombre réels**.



Cependant, avec les réels, une autre opération s'est avérée impossible: **la racine carrée de -1** n'existe pas.

Alors, que fait-on quand une opération est impossible? On invente un autre type de nombre, pardi!

Impossible, dites-vous? C'est ce que nous allons voir. Bienvenue au pays des **nombre imaginaires**... et même au-delà...

Nous allons donc entrer dans un monde assez étrange: celui des **nombre complexes et hypercomplexes**. Que ces mots ne vous fassent pas fuir, *complexe* n'a pas le sens de *difficile* ici. Il a plutôt le sens de *composé*. En effet, vous allez voir que ce sont des nombres composés de plusieurs parties.

Il s'agit cependant d'un monde assez abstrait, qui va bouleverser la notion de nombres que vous connaissez. En effet vous allez rencontrer des nombres *qui ne servent pas à compter ou à mesurer*, comme vous en aviez l'habitude.

Mais alors, à quoi servent-ils me direz-vous... Nous allons le découvrir un peu au cours de ce tuto, mais sachez par exemple que les nombres complexes sont très utilisés en physique (traitement du signal, automatique,...), et les nombres hypercomplexes sont utilisés dans les moteurs de jeux vidéos et dans l'animation 3D.

Le but de ce tuto n'est pas de faire de vous des experts dans ces domaines évidemment. Plus modestement, il s'agit d'une introduction à ces notions, qui j'espère vous permettra d'aborder

Introduction

de manière sereine des cours de plus haut niveau.

Ce tutoriel est assez axé sur l'histoire des mathématiques, pour montrer comment ces notions ont émergé dans la tête des mathématiciens, ce qui j'espère vous permettra d'en avoir une vision plus intuitive. De ce fait, il peut constituer un bon complément à un cours plus classique sur le sujet.

i

Pour suivre ce tuto, vous devez être familiers avec les nombres évoqués au début, jusqu'aux nombres réels.

Vous devez également connaître les équations du premier et du second degré. Si un apprentissage ou une révision de ces notions s'impose, je vous renvoie à [ce tutoriel sur les équations](#) \square .

Dans tous les cas, n'hésitez pas à jeter un coup d'oeil au tuto, la curiosité n'a jamais fait de mal...

Première partie

Des mathématiciens pleins d'imagination

I.1. Où sont-ils ?

I.1.1. Une torture mentale

i

Allez, c'est parti, nous allons donc inventer un nouveau type de nombre...

Bon, en fait nous n'allons rien inventer du tout. Nous avons quelques siècles de retard...

En effet, c'est en 1545 que Jérôme Cardan, un mathématicien italien, publie un livre dans lequel il tente de résoudre le problème suivant: «*Trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit 40*».

Quelle mouche l'a piqué de vouloir résoudre un problème pareil?

En fait ce problème peut avoir une utilité bien pratique. Imaginons que vous vouliez créer dans votre jardin un enclos rectangulaire de $40m^2$ et que vous disposiez de $20m$ de palissade pour le clôturer. Quelles dimensions allez-vous choisir pour votre enclos?

On cherche donc la longueur x et la largeur y de notre enclos. On sait que l'aire doit être égale à 40, ce qui nous donne une première équation:

$$— \quad xy = 40$$

Le périmètre vaut 20. On sait que $x + y$ représente la moitié du périmètre, donc vaut 10. Ce qui nous donne notre deuxième équation:

$$— \quad x + y = 10$$

On retrouve donc bien le problème de Cardan: "*Trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit 40*".

Nous nous retrouvons donc confrontés à **un système d'équations à deux inconnues**. Ce genre de problèmes nécessiterait un tuto entier pour bien le traiter. Je vais me contenter ici de vous donner une méthode: **la substitution**.

Comme à chaque fois que nous sommes confrontés à un problème nouveau, il faut essayer de **nous ramener à une forme de problème déjà connue**. Ici, nous aimerions donc bien retrouver des équations à une inconnue, avec lesquelles nous sommes familiers.

Regardez: nous avons $x + y = 10$, nous pouvons donc exprimer y en fonction de x . Cela nous donne $y = 10 - x$. Remplaçons alors y dans la première équation par son expression en fonction

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

de x (c'est la *substitution* dont je vous ai parlé).

Ce qui donne: $x(10 - x) = 40$.

Eurekâ! Nous avons maintenant une équation à une inconnue. Le reste du calcul devrait couler de source:

Nous avons: $x(10 - x) = 40$

qui nous donne: $10x - x^2 = 40$

Ce qui nous conduit à une équation du second degré! Procédons comme nous savons faire, c'est-à-dire en regroupant tous les termes d'un côté pour avoir une expression égale à 0:

$$-x^2 + 10x - 40 = 0$$

Nous retrouvons la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Premier réflexe, on calcule le **discriminant**:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 160 = -60$$

et ensuite on prend...



Et là, toutes vos alarmes clignotent en rouge: **il n'y a pas de solution**, le déterminant est négatif.

Ça, Cardan le savait. Cependant, il va faire un truc de fou: il va continuer la résolution de son équation, malgré «*la torture mentale*» (le mot est de lui ^{footnote:1}) que ces racines négatives lui inspirent. Il va tout simplement considérer que ces «racines impossibles» suivent les mêmes lois algébriques que les autres nombres.

²footnote:1 : Le terme qu'il a utilisé est *dismissis incruciationibus*. «Torture mentale»? Cette traduction est controversée, certains pensent qu'il aurait voulu dire «les produits en croix étant enlevés».

Il trouve donc deux solutions:

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{et} \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Solutions, vraiment? Voyons voir: prenons x_1 et calculons y_1 . Le calcul nous donne $y_1 = 10 - x_1 = 5 - \sqrt{-15}$.

Maintenant, calculons le produit de nos deux solutions:

$$\begin{aligned} x_1 \times y_1 &= (5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) \\ &= 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (\sqrt{-15} \times \sqrt{-15}) \\ &= 25 - (\sqrt{-15})^2 \end{aligned}$$

Si on considère que $\sqrt{-15}$ se comporte comme n'importe quelle racine, c'est-à-dire que $\sqrt{-15}^2 = -15$, on obtient:

$$x_1 \times y_1 = 25 - (-15) = 40$$



On retrouve bien les conditions demandées au départ: la somme vaut 10 et le produit vaut 40. **Notre équation avait bien des solutions!**

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

Absolument fou! Impensable!

Cardan termine d'ailleurs son problème par cette phrase:

... Cette torture mentale achevée, en multipliant $5 + \sqrt{-15}$ par $5 - \sqrt{-15}$, cela donne 40.

Et l'on pousse la subtilité arithmétique à une extrémité où, comme je l'ai dit, elle devient tellement subtile qu'elle est inutile.

Inutile, car il nous est impossible de construire notre enclos. À moins de pouvoir mesurer une longueur de $(5 + \sqrt{-15})$ mètres... Si vous y arrivez, appelez-moi...

Mais c'était sans compter sur les équations du troisième degré. En effet, les mathématiciens vont s'apercevoir que pour résoudre une équation du troisième degré, il leur faut passer par une équation intermédiaire du second degré, dont il faudra prendre en compte toutes les solutions, même imaginaires, pour mener à bien la résolution finale.

Pour les plus curieux, cette méthode est présentée en annexe. Pour les autres, il faut retenir que les mathématiciens se retrouvent maintenant avec un nouveau nombre sur les bras: $\sqrt{-1}$

I.1.2. Cachez ces nombres que je ne saurais voir

Nous allons tout de suite voir l'un des plus gros problèmes posés par ce nombre:

Calculons $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. La réponse devrait être -1 .

$$-1 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$$

On obtient $1 = -1$!

Est-ce une incohérence? Nos nombres, à peine nés, sont-ils voués à disparaître?

Non, le problème, c'est que l'on a appliqué la formule suivante: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, qui est valable pour les nombres positifs, mais pas pour les nombres négatifs.

C'est un problème qui a torturé le grand Euler lui-même, au point qu'il a inventé une notation pour éviter l'écriture $\sqrt{-1}$. Ce nombre, il va le noter «*i*», avec comme propriété que:

$$i^2 = -1$$

Ainsi, hormis cette propriété qui le caractérise, ce nombre peut se manipuler comme n'importe quel autre nombre, sans difficultés particulières.

?

Pourquoi *i*?

Parce que c'est un nombre *imaginaire*, nom donné par Descartes par opposition aux nombres réels, pour souligner l'étrangeté de ces racines «impossibles».

Descartes n'est pas le seul à trouver ces nombres étranges. On proposera même de faire de cette entité, non pas un nombre mais... un signe. Nous aurions donc eu le signe «+», le signe «-» et le signe « $\sqrt{-1}$ ». Et tout comme on aurait des nombres tels que 3 ou -4, on aurait le nombre $2\sqrt{-1}$ ou $-4\sqrt{-1}$.

i sera d'ailleurs nommé à ses débuts *piu di meno*, c'est-à-dire *plus de moins*, une sorte de nombre hybride ni positif, ni négatif...

Que devient alors la propriété $i^2 = -1$. Elle devient... une **règle des signes**. Tout comme on a «moins par moins donne plus» (*meno fa meno da piu*), on a «plus de moins fois plus de moins donne moins» (*piu di meno fa piu di meno da meno*).

Du Signe $\sqrt{-1}$.

10. Je mets en titre, *Du signe $\sqrt{-1}$* , et non, *De la quantité ou De l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$* ; parceque $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif.

Mais que veut dire ce signe? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes $+$ et $-$. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est ni additive, ni soustractive, ni égale à zéro. La qualité marquée par $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qu'indique $+$, ni à celle qui est désignée par $-$. Qu'est-elle donc?

Abbé Buée, Mémoire sur les quantités imaginaires (1805)

I.1.3. Sortons du cadre...

Mais une question demeure: qu'est-elle donc, cette quantité, ni positive, ni négative? Que représente ce signe? La réponse donnée par le mathématicien suisse Argand (1768–1822) va vous surprendre: il s'agit du signe de la ... **perpendicularité!**



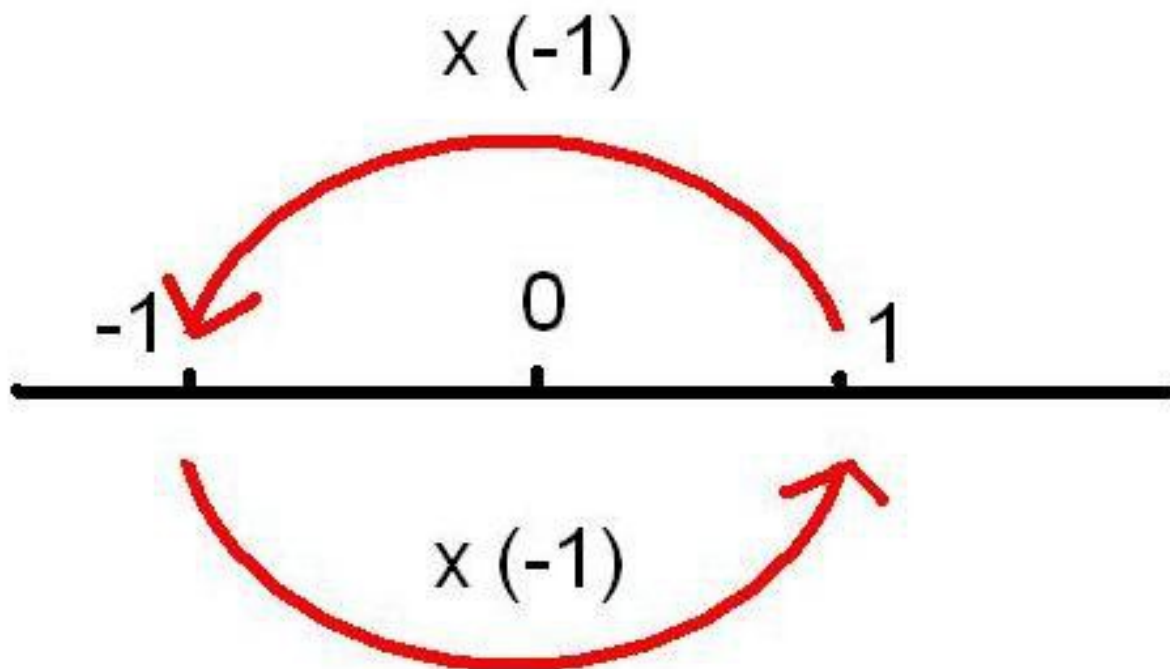
Que vient faire la géométrie dans un problème purement algébrique (la résolution d'une équation)?

Peut-être sans vous en rendre compte, vous faites de la géométrie lorsque vous utilisez des nombres. Vous savez par exemple que les nombres réels sont représentés sur une droite.

- Pour faire $3 + 2$ par exemple, vous vous placez sur le nombre 3, puis vous vous décalez de 2 vers la droite (vous faites **une translation**). Pour faire $3 - 2$, vous vous déplacez au contraire de 2 vers la gauche.

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

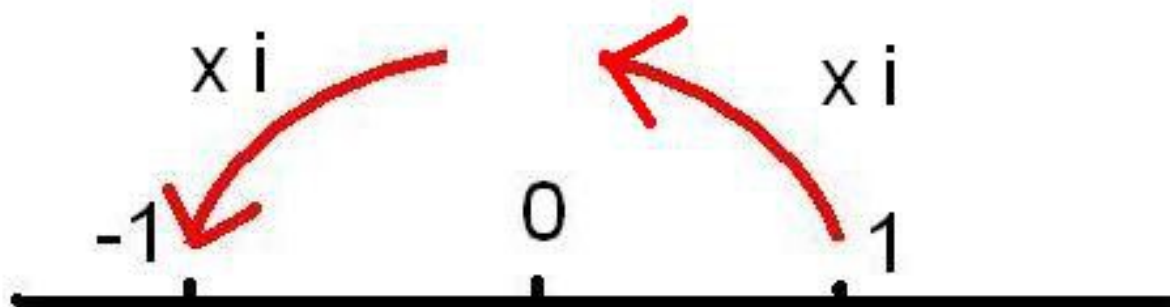
- Et pour les multiplications? Elles représentent un **agrandissement**. Lorsque vous faites 3×5 , vous prenez la distance entre 0 et 3, et vous l'agrandissez 5 fois, pour arriver à 15.
- Et pour un nombre négatif? Vous faites une rotation de 180° ! Regardez comment la règle des signes est représentée:



La règle des signes

La multiplication par -1 peut être vue comme une rotation de 180° . Deux rotations équivalent à un tour complet, ce qui explique que -1 multiplié par -1 donnent $+1$.

Pour $i^2 = -1$, nous devons chercher une rotation, qui combinée à elle-même, donne une rotation de 180° . Qu'est-ce donc, si ce n'est une **rotation de 90°** ?

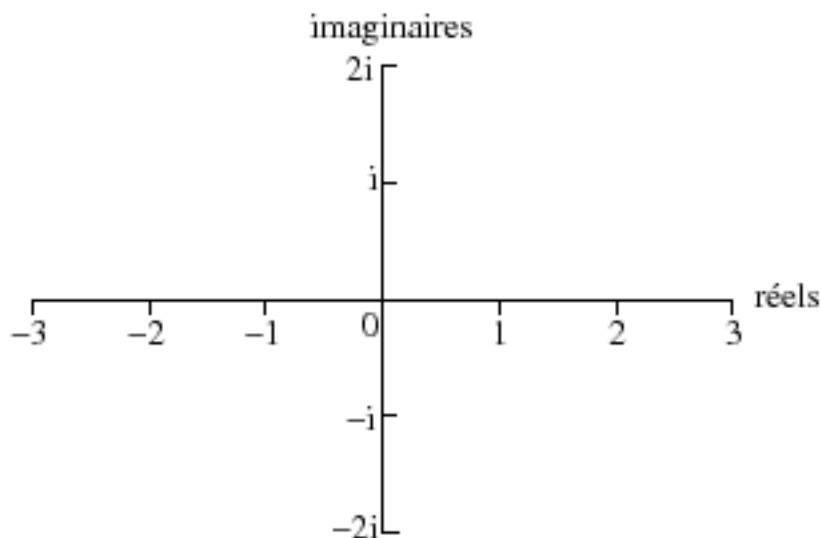


La multiplication par i

Voilà donc la solution proposée par Argand: notre nombre i se trouve **en dehors de la droite**: au-dessus du zéro, sur un axe perpendiculaire à la droite des réels! Et il n'est pas seul. Tout comme la droite des réels, cette droite peut contenir plein de nouveaux nombres: $2i$, $-3.5i$, $\sqrt{2}i, \dots$

i

Tout un monde s'ouvre à nous: en plus de la droite des réels, nous avons maintenant la **droite des imaginaires**, qui lui est perpendiculaire.



La droite des imaginaires

I.1.4. Complexifions tout ça...

Ces nombres devraient pouvoir s'additionner. Par exemple, $2i + 3i = 5i$, $2i - 3i = -i$...

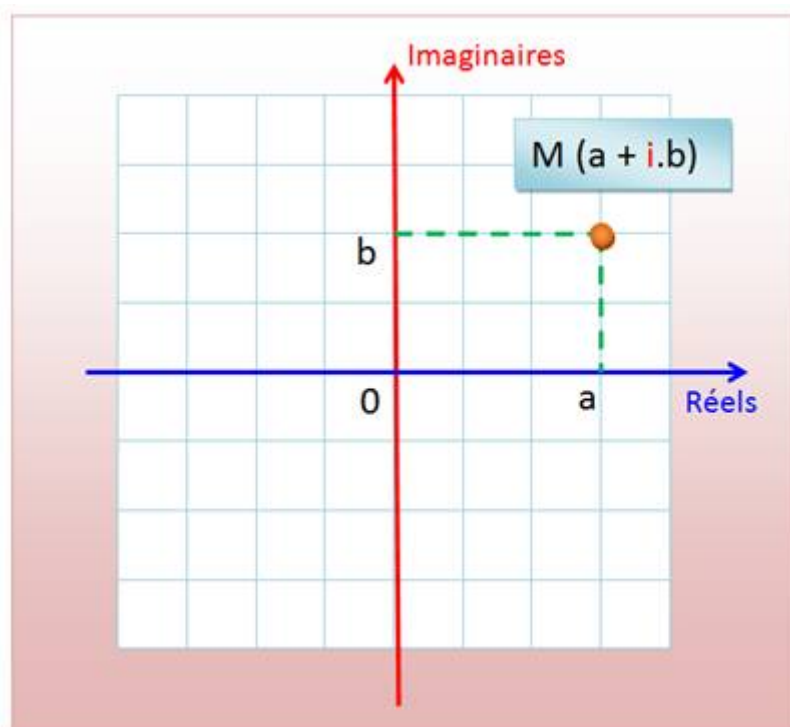
Mais que vaut $3 + 2i$. Et où se trouve ce nombre?

Pour le savoir, revenons à notre représentation géométrique des additions sur la droite des nombres. Comment représentait-on l'opération $2 - 3$ par exemple?

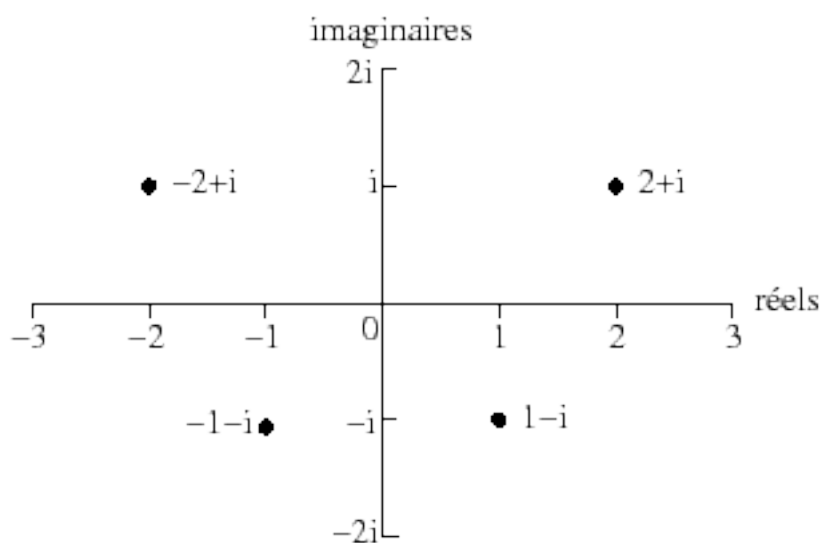
Souvenez-vous: à partir de 0, on se translatait de 2 vers la droite (dans la direction des nombres positifs), puis de 3 vers la gauche (dans la direction des nombres négatifs), et on arrivait à notre résultat, -1 .

Faisons pareil avec $3 + 2i$: à partir de 0, translatons-nous de 3 vers la droite puis de 2 vers... vers **le haut**, dans la direction des nombres imaginaires.

I. Des mathématiciens pleins d'imagination



En fait, il n'y a pas que sur nos deux droites qu'il existe des nombres, il en existe **dans tout le plan**! Ce sont des nombres de la forme $a + ib$, avec a et b des nombres réels, et i l'unité imaginaire.



Le plan complexe

Ces nombres ont reçu un nom: les **nombres complexes**, qui sont composés d'une partie réelle (a) et d'une partie imaginaire (b), représentés dans le plan par un point de coordonnées (a, b) .

i

Ce plan est appelé **plan complexe**, ou **plan d'Argand**, en hommage à son découvreur. De même, ce nouvel ensemble de nombres que nous venons de découvrir s'appelle **l'ensemble des nombres complexes**, que l'on note C .

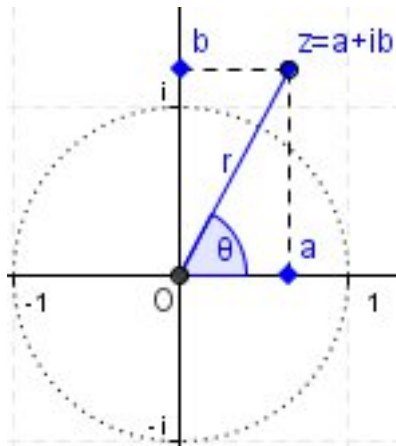
i

Un nombre sans partie réelle, comme $2i$, 4 , $32i$ ou $-5i$, sera appelé **nombre imaginaire pur**.

A contrario, un nombre réel est un nombre **avec partie imaginaire nulle** (2 peut ainsi s'écrire $2 + 0i$)

I.1.4.1. Représentations géométriques

Appelons notre nombre complexe z .



$$z = a + ib$$

Ce nombre peut donc être représenté par ses coordonnées (a, b) dans le plan: c'est ce qu'on appelle la **représentation cartésienne**.

Remarquons aussi qu'on peut le représenter par deux autres grandeurs géométriques:

- une longueur: c'est la distance entre 0 et le point représentant ce nombre. On appelle cette grandeur le **module du nombre complexe**, noté $|z|$.

Comment est-elle calculée? Si vous regardez bien le schéma, vous pouvez voir apparaître un triangle rectangle, de côtés a et b , et dont l'hypoténuse est le côté dont on aimerait calculer la longueur. Donc un bon vieux Pythagore va nous aider! (Quand on vous disait que vous le retrouveriez partout, celui-là 😊).

L'application du théorème de Pythagore nous donne donc:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- un angle: c'est l'angle θ sur la figure. On l'appelle **l'argument du nombre complexe**, noté $\arg(z)$.

Encore une fois, c'est le triangle rectangle que l'on voit sur la figure qui va nous aider à trouver l'argument, grâce à la trigonométrie, qui nous donne les deux formules suivantes:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ces deux formules permettent de retrouver la valeur de θ .

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

i

Cette représentation par module et argument s'appelle la **représentation polaire** du nombre complexe.

I.2. Additionnons, multiplions...

Introduction

Que peut-on faire avec nos nouveaux nombres? Le minimum serait de pouvoir faire tout ce qu'on peut faire avec les nombres réels... Voyons voir:

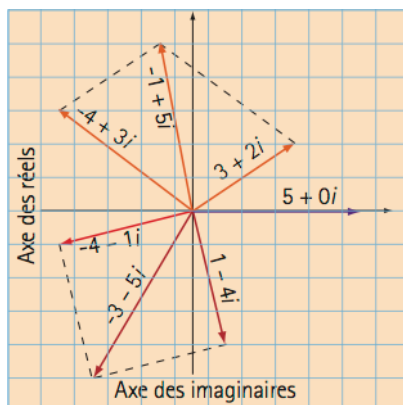
I.2.1. Additionnons

On peut les additionner, en additionnant leur partie réelle et leur partie imaginaire:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

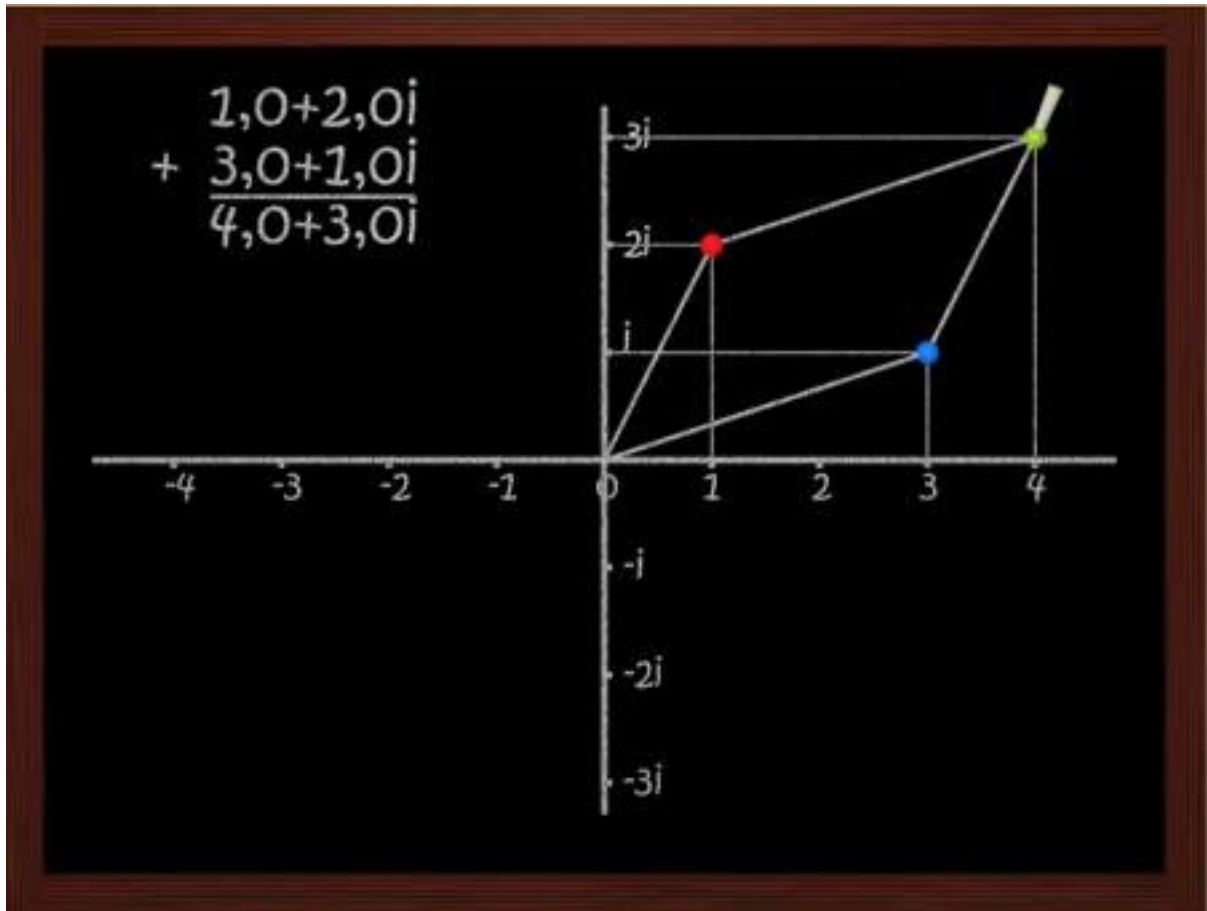
On obtient bien un nombre complexe (de la forme $a + ib$).

Voyons ce que cela donne visuellement:



$$(3 + 2i) + (-4 + 3i) = -1 + 5i$$

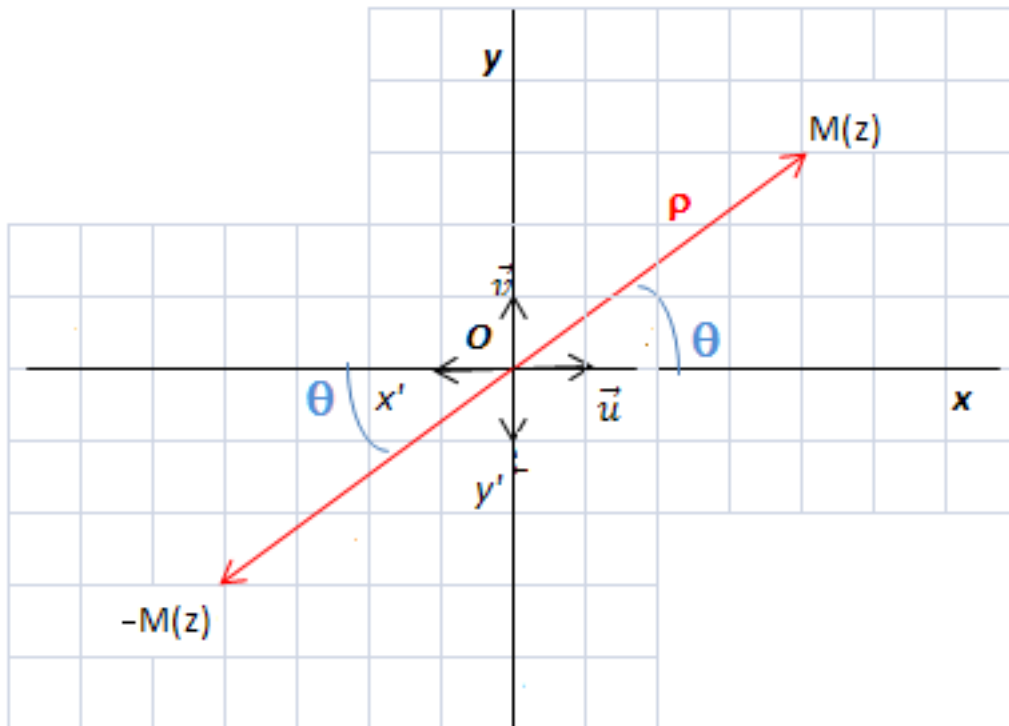
$$(-4 - i) + (1 - 4i) = -3 - 5i$$



Si vous avez déjà vu les vecteurs, vous pouvez remarquer que les nombres complexes s'additionnent comme des vecteurs.

I.2.1.1. Soustrayons

Peut-on alors, comme dans les nombres réels, trouver l'opposé d'un nombre complexe? Cela nous permettrait d'utiliser aussi la soustraction. Si on a un nombre z , quel nombre faut-il lui additionner pour obtenir 0? Graphiquement, on le voit très bien, et vous pouvez vérifier en faisant le calcul, que l'opposé de $a + ib$, c'est le nombre $-a - ib$.



L'opposé d'un nombre

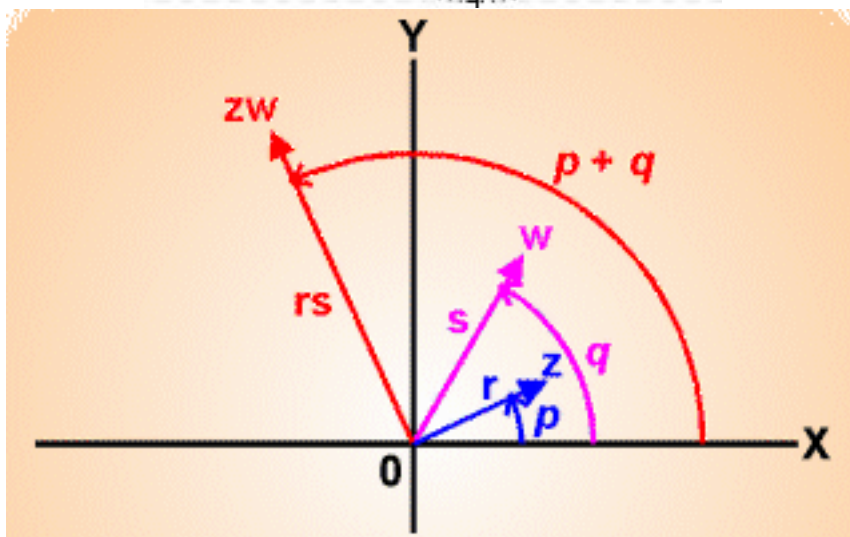
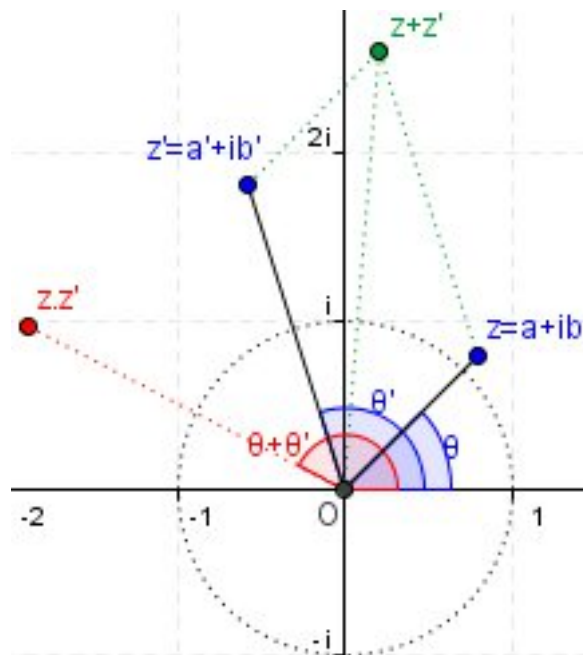
I.2.2. Multiplions

Comment multiplier deux nombres complexes? Par exemple $(a + ib) \times (c + id)$. Sans plus de difficulté qu'avec les nombres réels. Vu que a, b, c et d sont des réels, nous allons utiliser la double distributivité, en n'oubliant pas que $i^2 = -1$. Ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}(a + ib) \times (c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

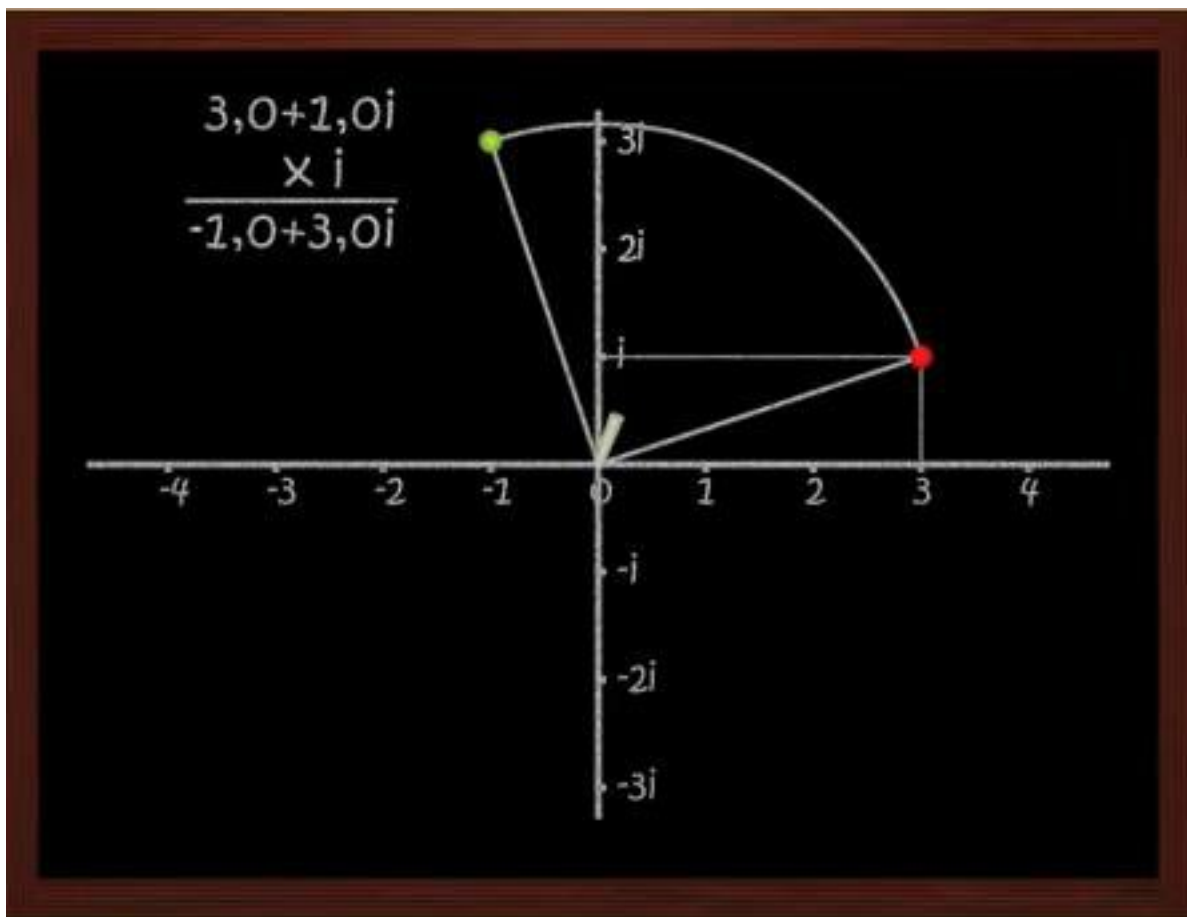
On obtient toujours un nombre complexe (de la forme $a + ib$). Voyons ce que cela nous donne graphiquement:

I. Des mathématiciens pleins d'imagination



Multiplications de nombres complexes

Qu'observe-t-on? En multipliant deux nombres, on **multiplie leur module** et on **ajoute leur argument**. On le voyait déjà avec la multiplication par i : cette multiplication consistait à faire une rotation de 90° , qui est l'argument de i . De même, multiplier par un nombre z consiste à effectuer une rotation d'angle $\arg(z)$, et à multiplier le module du nombre par $|z|$.



La multiplication par i

I.2.2.1. Divisons

Peut-on alors diviser deux nombres complexes? Essayons de trouver le résultat de l'opération $\frac{a + ib}{c + id}$.

On devrait trouver un nombre de la forme $a' + ib'$. Mais ce qui nous gêne pour l'instant, c'est le i au dénominateur. Essayons de l'éliminer.

Pour cela, nous allons nous servir d'une *identité remarquable* (cela vous rappelle de vieux souvenirs, n'est-ce pas?). Remarquez que si on effectue l'opération suivante:

$(a + ib)(a - ib)$, on obtient $a^2 + b^2$, une expression dans laquelle on a éliminé i .

Multiplions donc le numérateur et le dénominateur par $c - id$, pour éliminer l'unité imaginaire du dénominateur:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + i \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}$$

On obtient bien un nombre complexe.

PS: inutile de vous souvenir de cette formule par coeur, l'important c'est de savoir la retrouver.

La technique que je viens de vous présenter est d'ailleurs souvent utilisée lorsqu'on manipule des nombres complexes, au point que le nombre $c - id$ a eu droit à une dénomination spéciale:

i

$c - id$ est appelé le **conjugué** de $c + id$. Le conjugué d'un nombre a donc la même partie réelle que ce nombre, mais une partie imaginaire opposée.

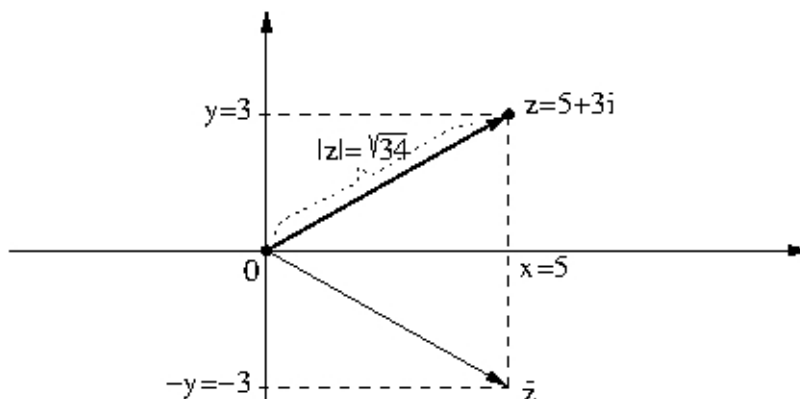


Schéma du conjugué d'un nombre

Regardez ces deux nombres: leurs arguments sont opposés. Si on les multiplie, comme on l'a vu précédemment, on additionne leurs arguments, ce qui nous donne 0° . Le résultat de la multiplication se trouve donc sur l'axe des réels, **c'est un nombre réel!** Cela explique pourquoi cette technique nous permet d'éliminer la partie imaginaire dans le résultat.

?

Toutes les divisions sont-elles possibles?

Non, regardez le résultat: il ne peut exister que si $c^2 + d^2$ est différent de 0. Donc si $c \neq 0$ et $d \neq 0$, donc si le diviseur $c + id$ est différent de $0 + 0i$, qui vaut 0.

!

On retrouve donc la règle qui existait pour les nombres réels:
Dans \mathbb{C} , la division par zéro est impossible.

1.2.3. Les réels, des complexes comme les autres ?

Avant de passer à la suite, remarquons que tout ce que nous faisons subir aux complexes s'appliquent aussi aux nombres réels. Les nombres réels ne sont finalement que des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle!

- un réel a peut s'écrire sous la forme $a + 0i$
- un réel possède un module, qui est égal à sa valeur absolue (c'est-à-dire sa distance par rapport à 0, exactement comme les nombres complexes.
- un réel possède aussi un argument: s'il est positif, son argument vaut 0, s'il est négatif, son argument vaut π .
- la multiplication des réels obéit aux mêmes règles "géométriques" que la multiplication des complexes. Lorsqu'on multiplie deux réels, on multiplie leur module, et on ajoute leurs arguments, ce qui justifie la règle des signes: multiplier par un nombre négatif revient à ajouter π à l'argument du premier, donc donne un nombre négatif. La multiplication

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

de deux nombres négatifs donne un argument égal à $\pi + \pi$, ce qui donne un angle de 0, donc un nombre positif.

Il y a cependant une grosse différence entre \mathbb{R} et \mathbb{C} : il n'y a pas de **relations d'ordre** dans \mathbb{C} . En clair, on ne peut pas dire si un nombre est plus grand ou plus petit qu'un autre. Géométriquement, on le voit bien: sur la droite des réels, on peut aller de gauche à droite, du plus petit nombre vers le plus grand. Mais dans le plan complexe, comment ferait-on?

Alors certes, on peut essayer d'en bricoler une, de relation d'ordre.

Il faut tout d'abord qu'elle soit compatible avec \mathbb{R} . On pourrait donc par exemple dire qu'un nombre est plus grand qu'un autre si sa partie réelle est plus grande. Mais cette règle seule ne permettrait pas de différencier 0 et i par exemple. Rajoutons donc une autre règle: si les parties réelles sont égales, le nombre ayant la plus grande partie imaginaire sera considéré comme le plus grand.

Nous avons donc créé une relation d'ordre parfaitement définie. Oui mais voilà, cette relation n'est pas compatible avec la multiplication. Rappelez-vous, la multiplication entraîne une rotation, donc par exemple la multiplication de deux nombres à parties réelles ou imaginaires positives peut donner un nombre à parties réelles ou imaginaires négatives... donc plus petit...

C'est pour cela qu'on n'utilise pas cette relation d'ordre sur \mathbb{C} . Qu'est-ce que cela change, me direz-vous? Eh bien, beaucoup de choses:

- Sur \mathbb{R} , on a l'habitude de parler **d'intervalles** ($]a, b[$ par exemple). Or sur \mathbb{C} , cela n'a plus aucun sens de parler d'un nombre compris entre a et b !
- Lorsqu'on étudie des fonctions complexes, peut-on encore parler de **fonction croissante? décroissante?** de **suites bornées ou majorées?**
- La notion de **limite** a-t-elle encore un sens? (Que signifie « z tend vers 0» dans \mathbb{C} ?)

Bref, beaucoup de questions. Mais rassurez-vous, tout ne s'écroule pas. Au contraire, tout cela ouvre un autre monde, entièrement nouveau, celui de **l'analyse complexe**. Et un monde complet à découvrir, rien ne peut faire plus plaisir à un mathématicien.

Conclusion

Les notions que nous venons de voir sont géométriquement très simples, mais pourtant assez difficiles à assimiler: nos notions intuitives de nombres, d'additions, de multiplications... se voient soudainement projetées dans un plan assez abstrait, ce qui fait des nombres complexes une notion peu intuitive. Il suffit de voir comment elle a mis des siècles à être acceptée pleinement par nos plus grands mathématiciens!

Pour bien les assimiler, **une bonne vision géométrique du concept** me semble nécessaire. C'est pourquoi je vous encourage à regarder cette vidéo, qui présente de manière très visuelle ce que nous avons vu jusqu'ici:

ÉLÉMENT EXTERNE (VIDEO) —

Consultez cet élément à l'adresse <https://www.youtube.com/embed/S7aXHqk7sbk?feature=oembed>.

I.3. Le sacre des complexes

Introduction

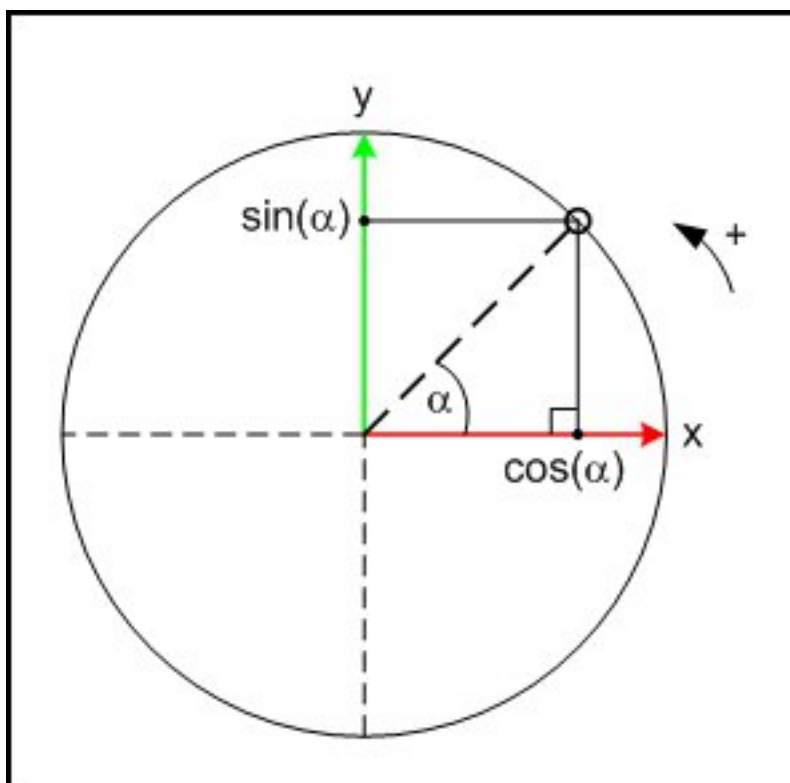
Nous avons donc vu la **représentation cartésienne** et la **représentation polaire** des nombres complexes. Nous allons maintenant en découvrir deux autres, qui sont très utilisées: **la forme trigonométrique** et **la forme exponentielle**.

I.3.1. La forme trigonométrique

Pour ce chapitre, je vais vous demander de vous remémorer vos cours de **trigonométrie**. Vous savez, le cours avec les sinus et les cosinus?

Ah, je sais, c'est loin. Si vous avez quelques trous de mémoire, je vous conseille [ce cours très bien fait](#) ☞.

Mais pour ce cours, j'aurai juste besoin de cette image, qui vous montre la représentation géométrique du sinus et du cosinus d'un nombre:



Cela devrait vous faire penser à la représentation des nombres complexes. Il semblerait que la partie réelle ait un rapport avec le cosinus de l'argument, et que la partie imaginaire soit en lien

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

avec le sinus.

Mais attention, l'image ci-dessus est valable uniquement pour l'hypoténuse égale à 1 (souvenez-vous, cette représentation est valable dans le cercle unité, c'est-à-dire le cercle de rayon 1).

Dans le cas de nos nombres complexes, il faut tenir compte du module.

Ainsi, si on a notre nombre $z = a + ib$, avec $\arg(z) = \theta$, on aura:

$$a = |z| \cos \theta$$

$$b = |z| \sin \theta$$

Notre nombre peut donc s'écrire sous la forme:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

C'est ce qu'on appelle **la forme trigonométrique d'un nombre complexe**.



Ah, la trigo. Le truc qui m'a causé moultes migraines pendant ma scolarité.

Rassurez-vous, moi c'était pareil. Mais regardez comment les nombres complexes vont considérablement simplifier la trigonométrie, en rendant ses calculs beaucoup plus élégants.

Calculons le produit de deux nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs α et β .

Le résultat doit être un nombre de module 1 et d'argument $\alpha + \beta$ (rappelez-vous, lorsqu'on multiplie deux nombres complexes, leurs arguments s'ajoutent).

on a donc:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

En développant, cela nous donne:

$$(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient:


$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Voilà le genre de formules qui vous a donné mal à la tête, et qui, grâce aux complexes, se retrouve facilement, juste en appliquant la distributivité!

Réjouissez-vous, au prochain chapitre, on va même apprendre à se passer des cosinus et sinus...



Note: nous allons à partir de maintenant prendre l'habitude de noter les angles, non pas en degrés, mais en **radians**, car la plupart des formules impliquant les sinus et cosinus ne sont valables que pour des angles exprimés dans cette unité. Un petit tour par [ce cours](#)  vous permettra peut-être de vous rafraîchir la mémoire à ce sujet.

Souvenez-vous qu'un tour complet de 360° fait 2π radians. On a donc les résultats suivants:



$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad \arg(-1) = \pi \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

1.3.2. La forme exponentielle



Ce chapitre nécessite quelques connaissances en analyse (exponentielle, dérivation...)

Note: dans ce qui va suivre, nous allons considérer un nombre z dont le module est égal à 1, pour la simplicité du raisonnement.

Nous avons donc z qui peut s'écrire en fonction de θ , par la fonction f définie ainsi:

$$f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

Or, lorsqu'on multiplie deux nombres, leurs arguments s'ajoutent. Notre fonction f doit donc avoir la propriété suivante:

$$f(\theta) \cdot f(\theta') = f(\theta + \theta')$$

Quelles fonctions possèdent cette propriété de transformer les multiplications en additions?

Cela ne vous rappelle rien? Souvenez-vous, **la fonction «puissance»** a cette propriété. En effet, il existe la formule suivante:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

La fonction a^x possède donc les propriétés que doit avoir notre fonction f .

Vous connaissez aussi la fonction exponentielle, qui nous permet d'écrire toutes les puissances sous la forme $a^x = e^{\alpha x}$, avec $\alpha = \ln(a)$. Notre nombre complexe peut donc s'écrire sous la forme:

$$z = e^{\alpha \theta}$$

En résumé, on a les égalités suivantes:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{et} \quad z = e^{\alpha \theta}$$

Et si on prend maintenant en compte le module, cela nous donne:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z| \cdot e^{\alpha \theta}$$

Vérifions que cette écriture est bien compatible avec la multiplication:

$$zz' = |z||z'|e^{\alpha \theta}e^{\alpha \theta'} = |z||z'|e^{\alpha(\theta+\theta')}$$

On a bien la multiplication des modules et l'addition des arguments.

Il nous reste à trouver la valeur de α . Malheureusement, nous allons être obligés pour cela d'utiliser une notion que nous n'avons pas encore abordée: **la dérivée d'une fonction**. Si vous ne la connaissez pas, vous allez être obligés de me faire confiance... Pour les autres, le calcul est le suivant:

$$\text{Soit la fonction } f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{\alpha \theta}$$

Pour trouver la valeur de alpha, nous allons dériver cette fonction, sous ses deux formes.

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

— Sous sa forme trigonométrique, cela nous donne:

$$f'(\theta) = -\sin\theta + i \cos\theta$$

— et sous sa forme exponentielle:

$$f'(\theta) = \alpha e^{\alpha\theta}$$

Or, remarquez que dans la forme trigonométrique, $f'(\theta) = if(\theta)$, et dans la forme exponentielle, $f'(\theta) = \alpha f(\theta)$.

Ce qui nous donne: $\alpha = i!$

Voilà donc le résultat que nous obtenons, que l'on appelle **la formule d'Euler**:

$$\boxed{\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}}$$

👁 Contenu masqué n°1

i

Cette formule est à la base de l'utilisation des nombres complexes dans d'autres domaines que les mathématiques. Elle permet de simplifier grandement les manipulations mathématiques nécessaires. Prenons l'exemple de l'électronique, où les signaux alternatifs obligeraient à des manipulations lourdes de cosinus et sinus. Un passage par les complexes permet de simplifier grandement les formules en utilisant les exponentielles, plus faciles à dériver, intégrer... Pour les plus avancés, on peut aussi citer les transformées de Laplace, les séries de Fourier,...

Amusons-nous par exemple à triturer cette formule. Calculons $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos\theta - i \sin\theta$$

En additionnant et en soustrayant les deux formules ci-dessus, on obtient:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

C'est ce que je vous avais promis: on peut remplacer les cosinus et sinus par des exponentielles, beaucoup plus faciles à manipuler.

Pour preuve, je vous propose la démonstration d'une autre formule, qui vous a aussi sûrement donné mal à la tête 🍊: celle de $\sin\alpha \cos\beta$.

👁 Contenu masqué n°2

i

Ces formules servent à transformer un produit (ou une puissance) de fonctions trigonométriques en somme, ce qui est très utile par exemple dans les calculs d'intégrales. C'est ce qu'on appelle la **linéarisation des fonctions trigonométriques**.

I.3.3. Le défilé des formules

Terminons ce chapitre par quelques curiosités mathématiques:

I.3.3.1. La plus belle des formules

Prenons le nombre -1 . Son argument vaut π , comme nous l'avions déjà dit. Il s'écrit donc $-1 = e^{i\pi}$.

Ce qui donne, écrit autrement:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Rendez-vous compte:

- 1 est le premier nombre que nous avons rencontré, il nous permettait de compter sur nos doigts.
- 0 a été inventé pour représenter... rien, une quantité inexistante.
- π a été inventé dans le cadre de la géométrie, pour calculer le périmètre d'un cercle.
- e a été inventé pour des raisons basement matérielles, pour calculer le rendement d'un compte avec intérêts.
- i a été inventé pour trouver une solution à des équations.

Voilà donc des nombres qui viennent de domaines complètement différents, et qui se retrouvent réunis en une seule formule. Magique, non?

Cette formule mérite bien son surnom de «**plus belle formule des mathématiques**», vous ne trouvez pas?

C'est Richard Feynman qui a surnommé cette formule ainsi, dans un cahier de notes qu'il écrivait alors qu'il avait... 14 ans!

I.3.3.2. La formule la plus mystérieuse

Prenons maintenant le nombre i lui-même. Il s'écrit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Prenons alors le logarithme de cette expression:

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2}, \text{ d'où}$$

$$\pi = \frac{2}{i}\ln(i) !!$$

La valeur de π écrite avec des nombres complexes! Le mathématicien Pierce (1809–1880) qualifia ce résultat de très mystérieux. Ce résultat servira pourtant à trouver une formule pour calculer π :

I. Des mathématiciens pleins d'imagination

Karl Heinrich Schellbach (1809–1890) réécrivra la formule sous la forme:

$$\frac{\pi i}{2} = \ln(i) = \ln \frac{1+i}{1-i} = \ln(1+i) - \ln(1-i)$$

Puis en utilisant ce qu'on appelle le développement en séries d'une fonction, il montrera que:

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$$

ce qui donne:

$$\ln(1+i) = i + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}i + \dots$$

$$\text{et } \ln(1-i) = -i + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}i + \dots$$

d'où:

$$\frac{\pi i}{2} = 2i - \frac{2}{3}i + \frac{2}{5}i - \dots \text{ donc}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



Les nombres complexes nous ont donc permis de trouver une formule permettant de calculer π !

Mais cette formule était déjà connue de Leibniz, et de plus elle n'est pas très efficace (convergence très lente).

Mais Schellbach s'aperçut que modifier l'expression sous le logarithme lui permettait d'obtenir des séries qui convergeaient plus rapidement, par exemple en notant:

$$\frac{\pi i}{2} = \ln(i) = \ln \frac{(2+i)(3+i)}{(2-i)(3-i)}$$

ou encore

$$\frac{\pi i}{2} = \ln(i) = \ln \frac{(5+i)^4(-239+i)}{(5-i)^4(-239-i)}$$

Cette dernière expression lui permettra d'obtenir la formule qui sera utilisée par l'ENIAC (un des premiers ordinateurs) pour calculer les 2000 premières décimales de π .

De plus, en élevant i à la puissance i , Pierce trouvera:

$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2078\dots$$

Encore un résultat mystérieux: i^i donne un nombre réel¹footnote:1! Pierce écrira: «*C'est absolument paradoxal. Nous n'avons aucune idée de ce que cela signifie. Mais nous l'avons prouvé, nous savons donc que c'est juste...*»

1. ²footnote:1 Et encore, l'histoire ne s'arrête pas là. En effet, vous verrez que les fonctions complexes ont quelque chose de spécial: elles peuvent prendre plusieurs valeurs (on parle de fonctions multi-valuées). i^i a en fait une infinité de valeurs réelles!

Contenu masqué

Contenu masqué n°1

Nous avons fait l'hypothèse dans tout ce qui précède que les fonctions complexes existent et qu'elles se manipulent exactement comme les fonctions réelles (par exemple pour la dérivation). Sachez que ce n'est pas aussi trivial et que cela fait appel à tout un domaine qu'on appelle **l'analyse complexe**. Domaine passionnant par ailleurs, mais que nous n'avons pas les moyens de développer ici. Mais sachez que dans les cas étudiés ici, ça marche plutôt bien, et vous pouvez me faire confiance pour les résultats (de toute façon, vous n'avez pas le choix 🍌). [Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°2

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \cdot \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{4i} \\ &= \frac{2i \sin(\alpha + \beta) + 2i \sin(\alpha - \beta)}{4i} \\ &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Et voilà, en quatre lignes c'est plié 🍌

[Retourner au texte.](#)

Deuxième partie
Au-delà de l'imaginaire

II.1. Le dernier des nombres ?

Introduction

Nous venons de voir que ces nouveaux nombres se révèlent plus utiles que ce pour quoi ils ont été conçus à la base. Cependant, répondent-ils à notre question de base justement? Souvenez-vous, nous avons inventé chaque ensemble de nombres pour trouver des solutions à nos équations. Existe-t-il alors encore des équations impossibles à résoudre avec les nombres complexes? Pour répondre à cette question, nous allons tout d'abord étudier les racines des nombres dans le cadre des complexes, avant de conclure.

II.1.1. Les racines de l'unité

II.1.1.1. La racine carrée

Si je vous demande la racine carrée de 4, que me répondez-vous? 2 bien sûr !!

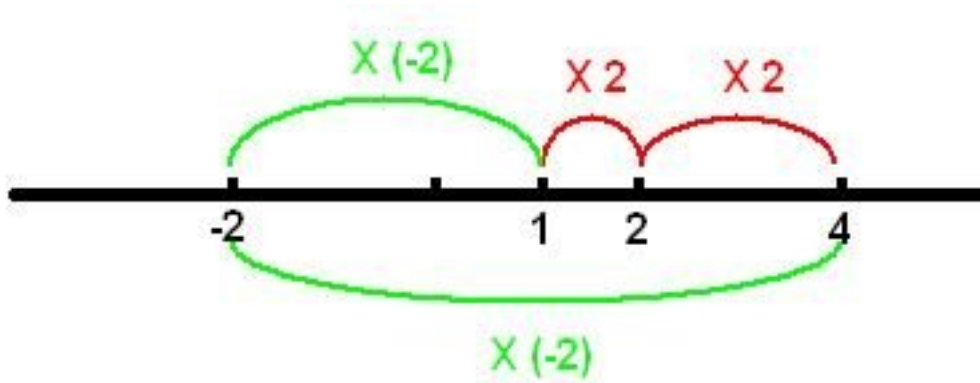
Pourtant revenons à la définition de la racine carrée: c'est l'opération inverse du carré. La racine carrée de 4, c'est donc le nombre x tel que, si on le multiplie par lui-même, on obtient 4 (c'est l'équation bien connue $x^2 = 4$).

Or, vous savez que cette équation a deux solutions: 2 et -2 . 4 devrait donc avoir deux racines! D'ailleurs cette constatation est compatible avec l'interprétation géométrique de la multiplication, que nous avons vue quelques chapitres plus tôt: multiplier par z , c'est multiplier l'argument par $|z|$ et tourner d'un angle $arg(z)$.

Ainsi:

- lorsqu'on fait 2×2 , on part de 1, on multiplie le module par 4, et on tourne deux fois de 0° (qui est l'argument du nombre 2).
- lorsqu'on fait $(-2) \times (-2)$, on part de 1, on multiplie le module par 4, et on tourne deux fois de 180° (qui est l'argument du nombre -2).

Dans les deux cas, on retombe bien sur le nombre 4.



Deux manières de retomber sur 4

?

Mais alors, pourquoi a-t-on toujours appris que la racine était unique?

Parce que vous avez toujours utilisé une convention que l'on prend lorsqu'on travaille avec les nombres réels: la racine carrée de a est la solution **positive** de l'équation $x^2 = a$.

Mais dans l'ensemble des complexes, souvenez-vous, il n'y a pas de relation d'ordre, et donc plus de notion de nombre positif ou négatif (la notion *supérieur ou inférieur* à 0 n'a plus de sens dans \mathbb{C}).

Dans \mathbb{C} , nous sommes donc obligés de prendre en considération toutes les racines. Nous allons mieux le voir avec les racines cubiques.

II.1.1.2. La racine cubique

Pour simplifier, nous allons nous débarrasser du module en travaillant avec les racines de 1, communément appelées les **racines de l'unité**.

Donc, question: quelles sont les racines cubiques de 1?

Il y a tout d'abord celle que l'on connaît tous: 1 (car $1 \times 1 \times 1 = 1$).

Y en a-t'il d'autres? Utilisons la géométrie des nombres pour répondre à cette question: en partant de 1, quelle rotation permet, lorsqu'on l'effectue 3 fois, de retomber sur 1?

i

La rotation d'un tiers de tour répond à notre problème.

Le nombre ayant pour argument $\frac{2\pi}{3}$ et pour module 1 est donc une racine cubique de l'unité. Il s'agit du nombre $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. En effet,

$$(e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 = e^{i.2\pi} = 1 \text{ (on a fait un tour complet)}$$

Mais ce n'est pas tout: remarquez que le nombre $\omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ est aussi une solution. En effet,

$$(e^{i\frac{4\pi}{3}})^3 = e^{i.4\pi} = 1 \text{ (on a fait deux tours complets).}$$

D'une manière générale, les racines n -ièmes de l'unité sont des nombres de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k = \{0, \dots, n - 1\}$.

II. Au-delà de l'imaginaire

Je vous laisse par exemple chercher par vous-mêmes: quelles sont les racines quatrièmes de l'unité?

☉ Contenu masqué n°3

On peut en fait généraliser ces résultats avec le théorème suivant:

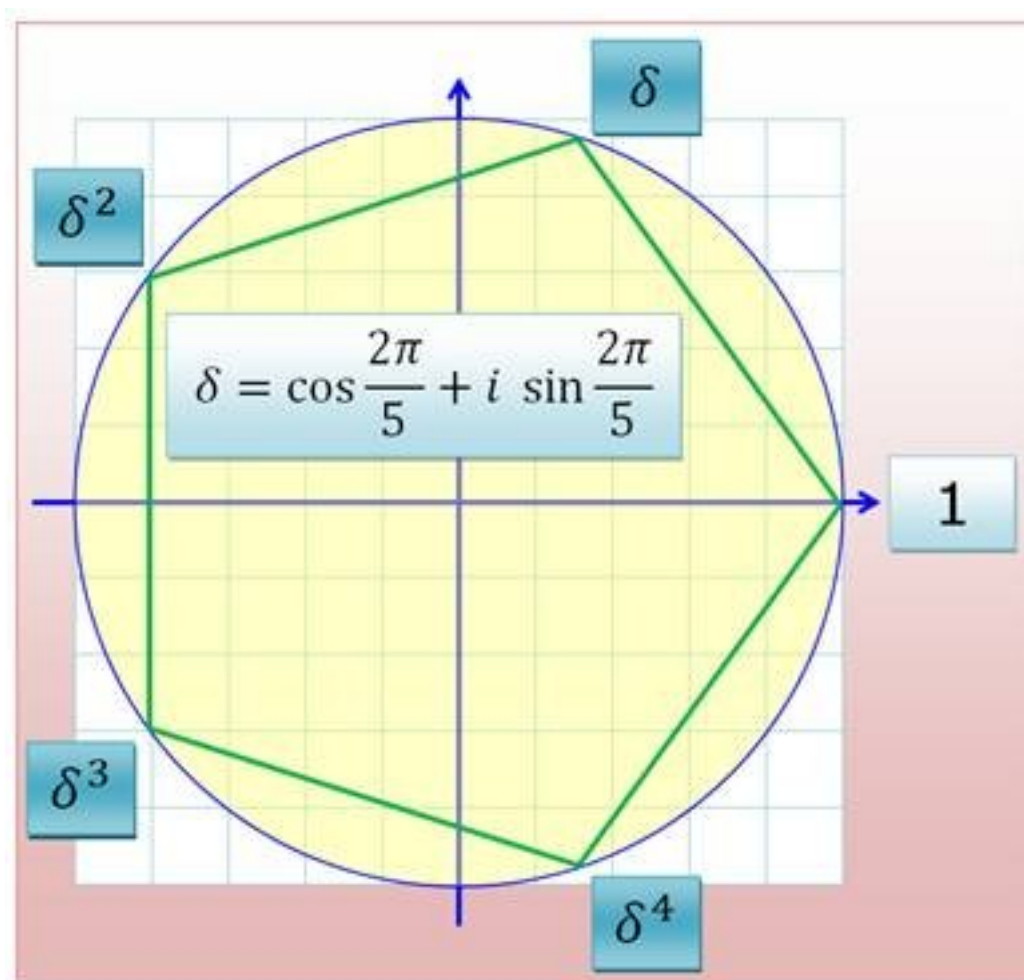
i

Il existe n racines n -ièmes de l'unité.

II.1.1.3. Les polygones constructibles

Ce théorème va nous servir à répondre à notre question existentielle. Mais nous allons juste faire une petite digression dans la géométrie pour montrer un peu la puissance des nombres complexes.

Lorsque l'on représente les racines n -ièmes de l'unité dans le plan complexes, on voit qu'elles forment un polygone régulier à n cotés.



Les racines cinquièmes de l'unité
(image tirée du blog [Nombres - Curiosités, théorie et usages](#) ☞)

II. Au-delà de l'imaginaire

Ce constat permettra à Gauss de résoudre un problème millénaire: quels sont les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

Petite explication: une droite est représentée algébriquement par une équation du premier degré (par exemple $ax + by = c$), tandis qu'un cercle est représenté par une équation du second degré (par exemple $x^2 + y^2 = c$). Un point constructible est donc à l'intersection de droites et/ou de cercles. Ses coordonnées doivent donc être solutions d'équations du second degré maximum. Est donc constructible un point dont les coordonnées s'écrivent à l'aide de nombres entiers, des quatre opérations et de racines carrées (par exemple, $1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ est constructible).

Gauss va donc étudier la constructibilité des racines de l'unité. Il montrera qu'une racine n -ième est constructible si n est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, avec k entier.

Sont donc constructibles par exemple les polygones à 3, 5, 17, 257 et ... 65537 côtés. (Pour la petite histoire, la procédure pour construire ce dernier polygone a été décrite par Johann Gustav Hermes, après dix ans d'efforts et en 200 pages d'instructions en 1894).

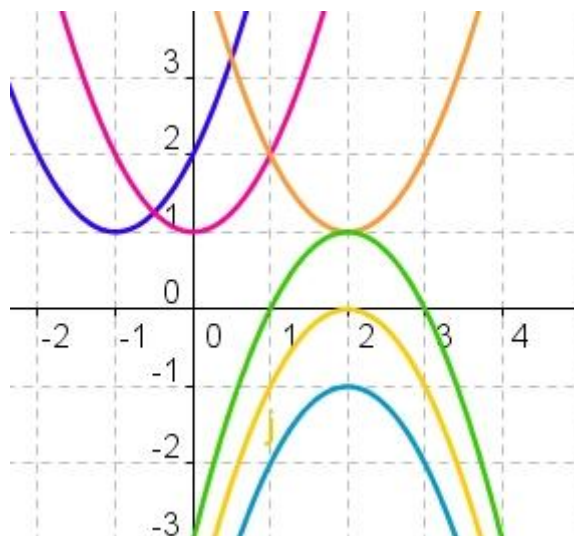
Nous avons là un petit aperçu de la puissance offerte par les nombres complexes aux mathématiciens, dans des domaines qui n'avaient à priori rien à voir.

II.1.2. Le théorème fondamental de l'algèbre

Nous avons vu que 1 avait n racines n -ièmes dans \mathbb{C} . De même, nous avons vu qu'une équation du second degré avait toujours deux racines, et qu'une équation du troisième degré en avait trois. Se pourrait-il que ce résultat se généralise? Une équation du n -ième degré a-t-elle toujours n solutions dans \mathbb{C} ?

Si la réponse est positive, cela clôturerait la quête que nous avons menée depuis le début du tuto: la recherche de nombres permettant de résoudre toutes les équations.

Mais pour répondre à cette question, il va nous falloir réfléchir un peu à la représentation géométrique d'un polynôme. Dans \mathbb{R} , on représente un polynôme par une courbe dans un repère cartésien. L'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses nous donne les éventuelles racines réelles.



Dans l'ensemble des complexes, c'est un peu plus compliqué. Si on prend un nombre x dans le plan complexe, son image par une fonction f sera un autre point du plan. On a donc une sorte

II. Au-delà de l'imaginaire

de «mapping» entre le plan complexe et le plan image. Si x parcourt un certain chemin dans le plan, son image $f(x)$ parcourt un autre chemin dans le même plan, comme ceci par exemple:

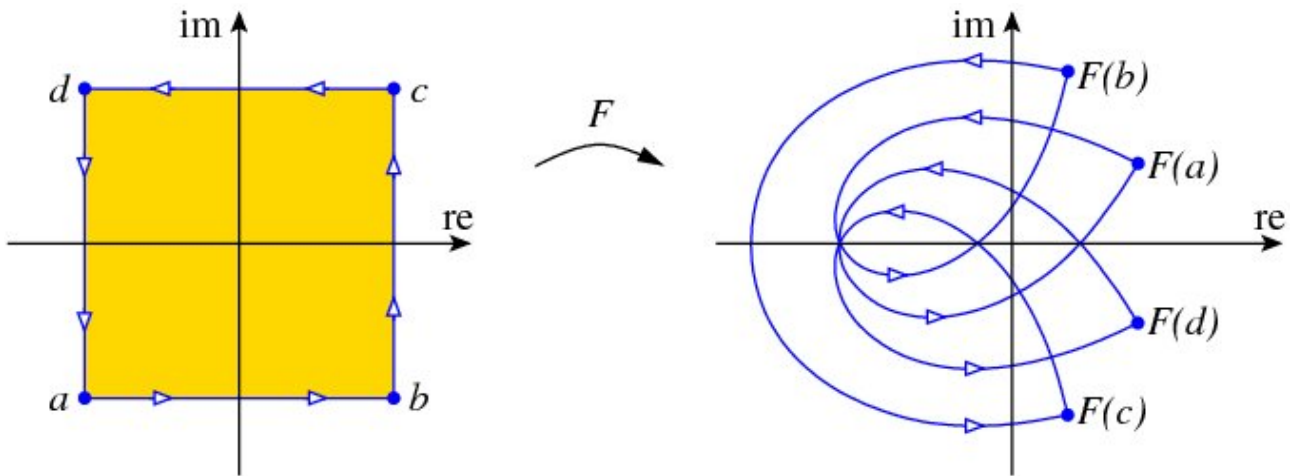


Image prise sur <http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/> ↗

$$f(z) = z^5 - 5z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 3z - 12$$

Nous cherchons donc s'il existe un nombre z tel que la courbe de $f(z)$ passe par 0. Prenons pour l'exemple le polynôme $f(z) = z^n + \dots + a_1z + a_0$.

!

Ce qui va suivre n'est pas une démonstration rigoureuse, plutôt une explication faite avec les mains, pour vous montrer de manière intuitive ce qui se passe. Pour une démonstration rigoureuse de ce théorème, vous pouvez jeter [un coup d'oeil sur ce lien](#) ↗.

Nous allons procéder en deux étapes:

- Prenons z très grand (c'est-à-dire avec un module très grand). Tous les termes du polynôme deviennent négligeables devant le terme z^n de plus haut degré. On peut donc dire que $f(z)$ se comporte comme z^n . Faisons alors parcourir à z un cercle très grand centré sur l'origine, de rayon $|z| = cste$. Son image par z^n est un autre cercle de rayon encore plus grand (de rayon $|z|^n$), qui entoure également l'origine.
- Prenons maintenant z égal à 0. Son image par f vaut a_0 .

Maintenant que se passe-t-il entre ces deux extrêmes? Lorsque z passe de manière continue d'un nombre très grand à 0, son image passe continûment d'une courbe fermée entourant l'origine à une valeur a_0 . On peut donc en déduire que la courbe va passer à un moment par le point d'origine $z = 0$ (Imaginez un lacet entourant le point 0 et que vous comprimez pour le réduire à un point, vous êtes obligés de faire passer ce lacet par le point 0).

Nous venons de montrer que f possède donc toujours au moins une racine. Or nous savons que si z_1 est racine d'un polynôme $P(z)$ de degré n , celui-ci peut s'écrire:

$P(z) = (z - z_1)Q(z)$, avec Q un polynôme de degré $n - 1$. Polynôme qui possède donc forcément une racine, donc peut se factoriser en un polynôme de degré inférieur, qui possède une racine, donc peut se factoriser...

Par récurrence, on a donc montré qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines dans \mathbb{C} : C'est le **théorème fondamental de l'algèbre** ou **théorème de d'Alembert-Gauss** ↗.

II. Au-delà de l'imaginaire

On dit que \mathbb{C} est **algébriquement clos**.

i

Comme dit plus haut, la démonstration rigoureuse est plus compliquée que cela. J'ai passé sous silence par exemple l'hypothèse de continuité de \mathbb{C} , hypothèse pourtant fondamentale pour la validité de ce théorème. La continuité est d'ailleurs une notion d'**analyse**, et non pas d'**algèbre**. Il est donc assez ironique de constater qu'il n'existe pas de preuve purement algébrique du théorème fondamental de l'algèbre.

Pour une explication un peu plus détaillée de la démonstration développée ici, une petite vidéo sympa, de la chaîne Numberphile:

ÉLÉMENT EXTERNE (VIDEO) —

Consultez cet élément à l'adresse <https://www.youtube.com/embed/shEk8sz1o0w?feature=oembed>.

Conclusion

N'existe-t-il plus alors d'équations polynomiale non résoluble? Sommes-nous arrivés au bout de notre quête? Il semblerait bien que oui.

Mais est-ce pour autant la fin des nombres? Heureusement non.

Nous avons entraperçu la puissance des nombres complexes et surtout de leur représentation géométrique dans le plan. N'est-il pas possible alors de généraliser ce concept? Le monde ne s'arrêtant pas à la dimension 2, mais allant au moins jusqu'à la dimension 3, peut-on trouver des nombres à trois dimensions, afin de profiter de leur puissance dans cette dimension supplémentaire?

C'est le pari fou de **Hamilton** (1805 - 1865), mathématicien irlandais, comme nous allons le voir au prochain chapitre. Je vous souhaite la bienvenue dans le monde des **nombres hypercomplexes**.

Contenu masqué

Contenu masqué n°3

Il y en a 4: 1, i , -1 et $-i$.

[Retourner au texte.](#)

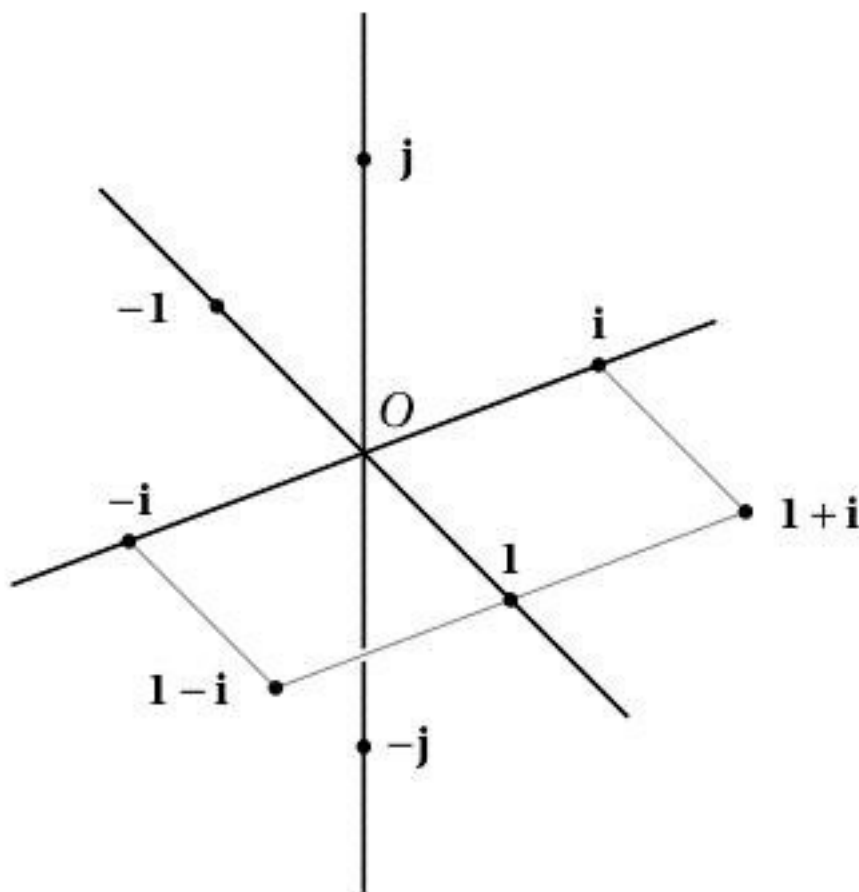
II.2. Ajoutons une dimension

II.2.1. Can you multiply triples?

Hamilton se lance donc dans la quête d'un système de nombres à 3 dimensions, de la forme:

$$a + ib + jc$$

avec $i^2 = -1$ et $j^2 = -1$. Mais attention: i n'est pas égal à j . Par analogie avec les nombres complexes, j est perpendiculaire à 1 et à i , ce qui donne la représentation géométrique suivante:



En ce qui concerne les opérations algébriques:

- L'addition de deux nombres ne lui pose aucune difficulté: elle se fait par addition des composants:

$$(a + ib + jc) + (a' + ib' + jc') = (a + a') + i(b + b') + j(c + c')$$

II. Au-delà de l'imaginaire

- Et la multiplication? Si on utilise les lois normales de l'algèbre (associativité, commutativité et distributivité), on obtient:

$$(a + ib + jc) \times (a' + ib' + jc') = (aa' - bb' - cc') + i(ab' + a'b) + j(ac' + a'c) + ij(bc' + c'b)$$

Du coup, que vaut ij ? Pour que la multiplication donne un nombre à trois dimensions, ij doit être égal à un nombre de la forme $\alpha + i\beta + j\gamma$. Mais toutes les tentatives d'Hamilton pour trouver les coefficients α , β et γ vont échouer. En effet, pour que ses nombres remplissent leur rôle géométrique, il faut que la multiplication obéisse à une autre règle: comme pour les nombres complexes, le produit des modules doit être égal au module du produit. Dit autrement, pour deux nombres u et v , on doit avoir: $|u||v| = |uv|$.

C'est cette règle qui empêchera Hamilton de créer une algèbre cohérente en trois dimensions, comme nous le montrerons tout à l'heure. Sa quête durera treize ans! Comme il le raconte dans sa biographie, tous les matins, ses enfants lui demandaient:

- *Papa, can you multiply triples?*
Ce à quoi il était obligé de répondre:
- *No, I can only add and subtract them.*

Jusqu'à ce fameux jour d'octobre 1843...

II.2.2. On a perdu la commutativité!

Alors qu'il fait sa promenade matinale, Hamilton a une illumination! Il sort son couteau et grave sur le pont de Brougham la formule suivante:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$



Plaque commémorative sur le pont de Brougham

Cette formule semble défier les lois de l'algèbre. Et d'où sort ce k ?

L'illumination qu'a Hamilton, c'est que le produit ij ne donne pas un nombre à 3 dimensions, mais un nombre qui se trouve dans une autre dimension, perpendiculaire à 1, à i et à j !

Il note ce nombre k . Comme l'axe contenant k est perpendiculaire à l'axe des réels, par analogie avec i et j , il pose $k^2 = -1$.

De même, il pose $jk = i$ et $ki = j$, ce qui donne $ijk = kk = -1$.

i

Ce ne sont donc plus des nombres à 3 dimensions qu'il se met à étudier, mais des nombres à 4 dimensions: des **quaternions**, de la forme $a + ib + jc + kd$.

L'ensemble des nombres obtenu est appelé \mathbb{H} , l'**ensemble des nombres hypercomplexes**

Il lui reste cependant une dernière difficulté à surmonter. En effet, imaginons le calcul suivant:

$$-1 = k^2 = (ij)^2 = (ij)(ij)$$

$$-1 = ijij \text{ par associativité de la multiplication}$$

$$-1 = ijji \text{ par commutativité de la multiplication}$$

$$-1 = i(-1)i \text{ car } jj = -1$$

$$-1 = (-1)(-1) \text{ car } i^2 = -1$$

$$-1 = 1 !!$$

Il lui faut résoudre ce problème très rapidement, sinon ses nouveaux nombres sont condamnés à disparaître aussi vite qu'ils sont apparus... Hamilton effectue alors un acte désespéré:

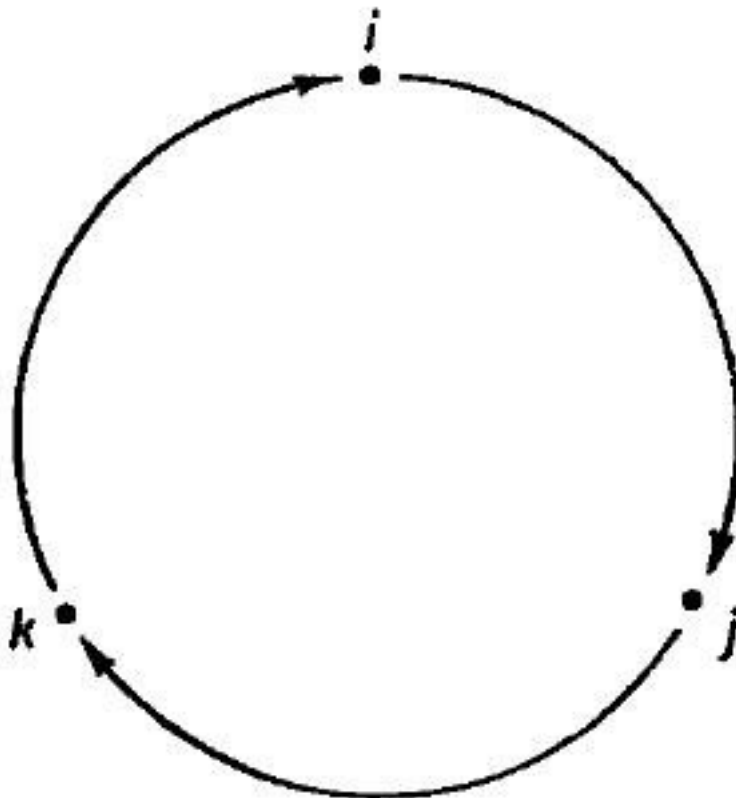
II. Au-delà de l'imaginaire



Pour lever ce paradoxe, Hamilton **sacrifie une loi de l'algèbre**: la commutativité de la multiplication.

Il pose $ij = -ji$, ainsi que $ik = -ki$ et $kj = -jk$, ce qui résout le problème.

Le schéma suivant permet de se remémorer ces règles de calcul:



En parcourant le cercle dans le sens horaire, on retrouve les produits $ij = k$, $jk = i$ et $ki = j$

En parcourant le cercle dans le sens contraire, on inverse les signes ($ji = -k$, $kj = -i$ et $ik = -j$)

Et là le miracle se produit: Hamilton obtient une algèbre cohérente (addition, soustraction, multiplication et division) et compatible avec la loi de multiplication des modules ($|u||v| = |uv|$).

La grosse nouveauté, c'est **la perte de la commutativité!** Elle peut sembler choquante, et pourtant elle est bien compatible avec le rôle géométrique qu'on veut faire tenir à ces nouveaux nombres. En effet, rappelez-vous ce qui nous a conduit à les inventer: généraliser à la troisième dimension la géométrie des nombres complexes, notamment les rotations. Or, faites cette petite expérience chez vous: tendez votre poing gauche fermé devant vous, paume vers le bas.

- tournez votre poignet d'un quart de tour vers la gauche, puis d'un quart de tour vers l'avant: votre poing est maintenant dirigé vers le bas.
- tournez votre poignet d'un quart de tour vers l'avant, puis d'un quart de tour vers la gauche: votre poing est maintenant dirigé vers la droite.

II. Au-delà de l'imaginaire

Le résultat est différent selon l'ordre dans lequel on effectue les rotations!



Les rotations dans l'espace ne sont pas commutatives, tout comme la multiplication des quaternions!!

II.3. Voyage dans la quatrième dimension

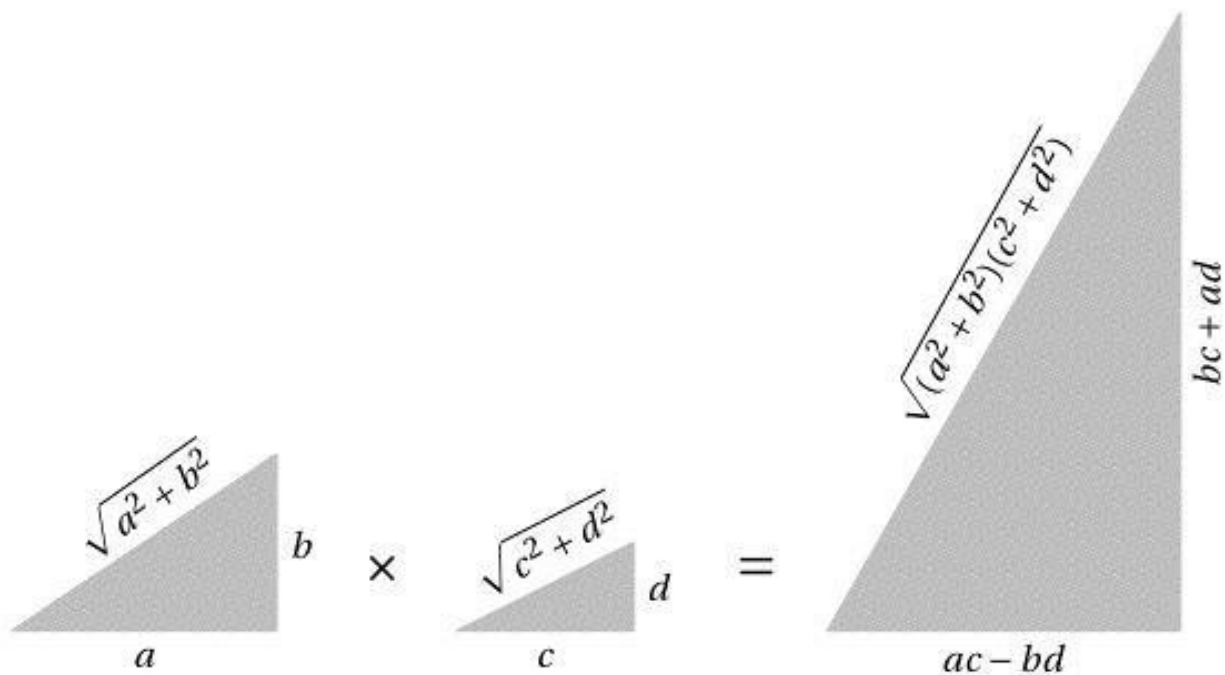
II.3.1. Pourquoi quatre ?

Il est temps de se pencher sur cette question: pourquoi un système de nombres à trois dimensions est impossible?

Pour cela, reprenons le produit de deux nombres complexes:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Le module du produit est donc égal à: $\sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2}$
Or si on applique la loi de multiplicativité des modules:



On trouve un module égal à $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$



Pour respecter la multiplication des modules, il faut donc que:
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

Bizarrement, ce résultat ne date pas de l'invention des nombres complexes. Il était connu du mathématicien grec **Diophante**, qui avait démontré que le produit de sommes de deux carrés pouvait lui-même se décomposer en somme de carrés, autrement dit:

II. Au-delà de l'imaginaire

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2$$

avec $A = ac - bd$ et $B = bc + ad$.

i

Cette égalité est d'ailleurs parfois nommée *la quatrième identité remarquable* ou *identité de Brahmagupta* [↗](#).

Diophante avait également noté que:

- $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$ et
- $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$

étaient somme de trois carrés, alors que leur produit (15) ne l'était pas. Son théorème ne marchait donc pas pour la somme de trois carrés.

Diophante savait donc, quelques siècles auparavant, que la quête d'Hamilton était vouée à l'échec, car c'est cette somme qu'il recherchait pour que le produit des modules soit égal au module du produit !!

De même, Euler aura déjà prouvé, un siècle plus tôt que Hamilton, que tout nombre pouvait s'écrire comme somme de quatre carrés, ce qui permettait d'avoir la propriété de multiplication des modules pour les quaternions. C'est [l'identité des quatre carrés d'Euler](#) [↗](#).

C'est son ami et mathématicien John Graves qui le fera remarquer à Hamilton:

On Friday last I looked into Lagrange's Théorie des Nombres [**note: il a confondu Lagrange et Legendre**] and found for the first time that I had lately been on the track of former mathematicians. For example, the mode by which I satisfied myself that a general theorem

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

was impossible was the very mode mentioned by Legendre. I then learned that the theorem

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

was Euler's.

Graves, *Letter to Hamilton (1844)*

Treize ans de recherches pour un résultat déjà connu par ailleurs... L'histoire ne dit pas quelle fût la réaction d'Hamilton à la réception de cette lettre...

Mais cela n'enlève rien à son génie. La découverte des quaternions reste un des moments les plus créatifs de l'histoire des mathématiques.

II.3.2. La postérité des quaternions

La découverte des quaternions occupe une place très importante en mathématiques. Elle ouvre notamment le champ à **la théorie des corps**, qui est tout un pan de l'algèbre (Les corps sont

II. Au-delà de l'imaginaire

grosso-modo des ensembles dans lesquels il est possible d'additionner, soustraire, multiplier et diviser (par exemple, \mathbb{Q} est un corps, alors que \mathbb{N} ne l'est pas car une division d'entiers ne donne pas forcément un entier)).

De même, réécrits sous forme de matrices (appelées **matrices de Pauli**), les quaternions jouent un grand rôle en mécanique quantique (en gros, dès que l'on prend en compte le **spin** des particules, les quaternions entrent en jeu).

?

Alors, pourquoi n'en avons-nous jamais entendu parler pendant nos études?

En fait vous manipulez des quaternions sans le savoir! Si, si, quand vous manipulez des vecteurs en géométrie ou en physique.

En effet, sous l'impulsion de Gibbs et Heaviside, la théorie des quaternions va progressivement donner les **vecteurs** (*les flèches* que vous avez l'habitude d'en manipuler en géométrie). En effet, un nombre $a + ib + jc + kd$ peut être décomposé en une partie **scalaire** (a) et une partie **vectorielle** à 3 dimensions ($ib + jc + kd$). Pour utiliser ces nombres en géométrie, on prend uniquement la partie vectorielle, qui constituera notre vecteur.

Regardons maintenant le produit de deux de ces vecteurs:

$$\begin{aligned}(ib + jc + kd)(if + jg + kh) &= -bf - cg - dh \\ &\quad + i(ch - dg) \\ &\quad + j(df - bh) \\ &\quad + k(bg - cf)\end{aligned}$$

Le résultat est un quaternion avec une partie scalaire et une partie vectorielle:

- la partie scalaire est l'opposé de ce qu'on appelle le **produit scalaire** des vecteurs.
- la partie vectorielle est ce qu'on appelle le **produit vectoriel**, qui se note $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Vous êtes sûrement familiers avec le produit scalaire, peut-être moins avec le produit vectoriel. Ce produit donne un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs d'origine. Il est très utilisé en physique, par exemple pour calculer le moment d'une force, ou la force exercée par un champ magnétique \vec{B} sur une particule en mouvement (Cette force est donnée par la formule $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Elle est donc perpendiculaire au vecteur vitesse de la particule, ce qui permet de courber les trajectoires dans un accélérateur de particules par exemple).

i

Il est à noter par exemple que le *Traité d'électricité et de magnétisme* de Maxwell est écrit avec le formalisme des quaternions. C'est le physicien **Olivier Heaviside** qui le réécrivit en utilisant les vecteurs, avec les fameuses **quatre équations de Maxwell** si chères aux étudiants en physique.

Les quaternions ont donc été remplacés dans le formalisme moderne par la notation vectorielle. Ce remplacement ne s'est pas fait sans heurt, chaque système ayant eu ses défenseurs et ses détracteurs, ces derniers accusant les premiers de conservatisme. Une société savante, la *International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics* [↗](#), a même été créée en 1895.

II. Au-delà de l'imaginaire

Ainsi, le mathématicien Tait écrit par exemple en préface de son *Elementary Treatise on Quaternions* (1890):

*It is disappointing to find how little progress has recently been made with the development of Quaternions ... Even Professor Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in view of his pamphlet on Vector Analysis, a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and Grassmann.*¹[footnote:1](#)

Ce à quoi Heaviside répondra, dans son livre *Electromagnetic Theory*, par un chapitre intitulé *Abstrusity of Quaternions and Comparative Simplicity Gained by Ignoring Them*:

*Clearly then, the quaternionic is an undesirable way of beginning the subject, and impedes the diffusion of vectorial analysis in a way which is as vexatious and brain-wasting as it is unnecessary.*³[footnote:2](#)

(Remarquez que les joutes verbales entre mathématiciens avaient de la classe quand même. Vous pouvez retrouver l'histoire de cette rivalité dans [ce journal des mathématiques](#)).

Les quaternions ont cependant récemment fait leur retour **dans le domaine de l'image de synthèse et dans les moteurs de jeu 3D**. La raison en est que les quaternions sont beaucoup plus rapides à manipuler que les matrices de rotation (4 nombres au lieu de 9), et que là où les matrices utilisent des sinus et cosinus, les quaternions se contentent d'opérations algébriques élémentaires.

i

Peut-être pourriez-vous d'ailleurs être intéressés par cette série de tutoriels (Youtube) sur les mathématiques des jeux vidéos, avec en particulier le cours sur les quaternions: [Maths for Game Devlopers: Rotation Quaternions](#)

i

Ceux qui préfèrent tâter de la physique théorique seront plutôt intéressés par cette thèse: [Quaternions: A history of complex noncommutative rotation groups in theoretical physics](#) (PDF)

Et une dernière petite remarque avant de partir. Vous souvenez-vous que votre prof utilisait parfois la notation (O, i, j, k) à la place de (O, x, y, z) pour désigner un repère dans l'espace? C'est encore un fantôme des quaternions qui continue à vivre dans vos livres de collège. 🍊

1. ²[footnote:1](#) *Il est navrant de voir le peu de progrès récents concernant les quaternions... Le professeur Gibbs peut être tenu pour l'un des responsables, au vu de son pamphlet sur l'Analyse Vectorielle, qui est un monstre hybride entre les notations de Hamilton et de Grassmann.*

2. ⁴[footnote:2](#) *Clairement les quaternions sont la manière la plus indésirable d'aborder le sujet, et entravent la diffusion de l'analyse vectorielle, de la manière la plus contraignante et la moins efficace possible.*

QUESTION

Soit le repère (O, I, J) .

On donne $A(-3; 5)$,

$D(-1; x)$. Déterminer x pc

Des quaternions se cachent dans un livre de seconde

II.3.3. Et après ?

Est-il alors possible de trouver des nombres hypercomplexes de dimension encore plus grande? Posons-nous d'abord la question: qu'appelle-t-on système de nombres hypercomplexes? Si on se réfère à ce qu'on a vu précédemment, un nombre de dimension n est un nombre de la forme:

$$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}$$

Les a_i sont des nombres réels et les e_i sont les *unités imaginaires*, qu'on pourrait appeler les vecteurs de base de notre système (l'équivalent de nos $i, j, k...$), avec les lois suivantes:

- une addition bien définie,
- une multiplication distributive par rapport à l'addition,
- et la propriété de multiplication des modules: $|u||v| = |uv|$.

La multiplication des réels étant déjà définie, il nous faut jouer sur les règles de multiplication des vecteurs de base (donc assigner une valeur à chaque produit $e_i.e_k$ pour $i, k = \{1, \dots, n\}$).

A partir de là, il a été montré que:

- \mathbb{C} est le seul système de nombres hypercomplexes dans lequel la multiplication est associative et commutative (Weierstrass, 1884).
- \mathbb{H} est le seul autre système de nombres hypercomplexes dans lequel la multiplication est associative (Frobenius, 1878).
- \mathbb{O} , l'ensemble des **octonions**, un systèmes de nombres à 8 dimensions, est le seul autre système de nombres hypercomplexes possibles ayant la loi de multiplicativité des modules (Hurwitz, 1898). Dans cet ensemble, la multiplication n'est plus associative.

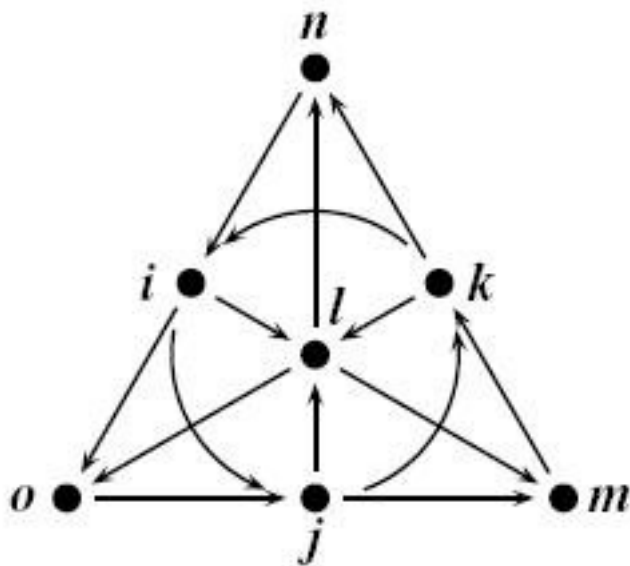
Hurwitz a dans le même temps prouvé qu'une égalité du genre:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) = c_1^2 + \dots + c_n^2$$

n'est possible que pour n égal à 1, 2, 4 ou 8, ce qui interdit de facto la création d'un autre ensemble de nombres possédant la loi de multiplicativité des modules. Pour $n = 8$, cette identité se nomme [l'identité des huit carrés de Degen](#) ↻

II. Au-delà de l'imaginaire

Juste pour votre curiosité, voici représentées de manière visuelle les règles de multiplication des 7 unités imaginaires des octonions:



Mais les mathématiciens ne se laissent pas brider aussi facilement: après s'être débarrassés de la relation d'ordre (dans les complexes), de la distributivité (dans les quaternions) et de l'associativité (dans les octonions), plus rien ne pouvait les arrêter: ils ont créé pleins d'autres systèmes de [nombres hypercomplexes](#) $\var�$: sédénions, coquaternions, biquaternions...

Cette période a été appelée la **libération de l'algèbre** par certains auteurs. Notons qu'elle suit la **libération de la géométrie** qui avait conduit les mathématiciens à construire les **géométries non-euclidiennes**.

Qui a dit que les mathématiques manquaient d'imagination?

Troisième partie
La suite du voyage...

III.1. Réflexions mathématiques

III.1.1. Qu'est-ce qu'un nombre ?

Je ne sais pas vous, mais pour moi la notion de nombre est devenue totalement floue... Je suis arrivé en ayant une petite idée de ce que c'est, et je repars avec le cerveau tout embrouillé. Des nombres à quatre dimensions, mais où va-t-on? Merci bien le tuto! Finalement, qu'est-ce qu'un nombre?

En tout cas, c'est une question qui fait partie de la grande histoire des maths:

- **au début, un nombre servait à compter**: d'ailleurs, au début, 0 n'était pas un nombre (comment peut-on compter «rien»?). Mais 1 n'était pas considéré comme un nombre non plus, on ne compte que quand il commence à y avoir plusieurs objets.
- **puis les fractions**: ça allait encore, ils pouvaient servir à compter des morceaux d'objet...
- **les nombres négatifs étaient bannis**: comment une quantité pouvait-elle être négative? On les appelait *les nombres absurdes*. Ils n'ont d'ailleurs été acceptés que bien après les nombres complexes.
- Puis les pythagoriciens découvrent la mesure de la diagonale du carré: $\sqrt{2}$, impossible à représenter par un «nombre» (rationnel). Catastrophe, puisque les pythagoriciens considéraient que *tout était nombre!* C'est à partir de là que la géométrie serait devenue la reine des sciences, pour aboutir aux *Eléments d'Euclide*, car la géométrie permettait de représenter des choses que l'arithmétique échouait à faire.
- Les nombres sont ensuite revenus sur le devant de la scène, avec le développement de **l'algèbre**, pour des raisons basement matérielles (commerce, développement du taux d'intérêt, amenant à résoudre des équations). Et les équations ont fait apparaître **les nombres complexes...**: l'ensemble \mathbb{C} . Rapidement acceptés en tant que nombres parce qu'ils étaient utiles, ils servaient à résoudre des équations. Et en plus, on leur a trouvé une **représentation géométrique** en 2D. Ils pouvaient du coup servir à représenter des rotations dans le plan.
- Du coup, pourquoi s'arrêter là? Inventons des nombres qui permettent de faire des rotations dans l'espace, se dit **Hamilton**. C'est la naissance des **quaternions**, des «nombres» à 4 dimensions (3 ce n'était pas possible, pour quelques raisons obscures d'algèbre récalcitrante). C'est la naissance de l'ensemble \mathbb{H} (H comme **hypercomplexes**).

Mais scandale: la multiplication des quaternions n'est pas commutative. C'est ce que certains auteurs ont appelé la *libération de l'algèbre*. On se libère des lois algébriques qu'on croyait immuables (cette période s'accompagne d'ailleurs de la *libération de la géométrie*, avec les géométries non euclidiennes).

- Du coup, pourquoi s'arrêter là? Libérons-nous des autres lois. Enlevons l'associativité (on obtiendra les **octonions** (ensemble \mathbb{O}), puis les **sédénions** (\mathbb{S})). Puis on inventera plein d'autres ensembles, qui se différencient par les lois et les opérations qui y sont

III. La suite du voyage...

acceptées.... On ne parle plus alors de nombre, mais d'éléments d'un ensemble structuré par des opérations algébriques: **des structures algébriques**.

La notion de nombre perd son statut central vu que les éléments de ces structures peuvent être n'importe quoi: des vecteurs, des fonctions, des polynômes, des rotations géométriques...

Du coup, qu'est devenue la notion de nombre en maths? Finalement, un nombre n'a pas de définition formelle mathématique. Ce qui est un peu ironique car si on demande aux gens dans la rue «Qu'est-ce que les maths?», la réponse la plus probable sera «la science des nombres» (définition qui a cessé d'être vraie dès Pythagore).

Peut-être qu'on peut au moins se raccrocher aux nombres entiers, qui ont l'air plus naturels. Pourtant laissez-moi vous narrer une histoire que Roger Penrose raconte dans son livre *A road to infinity*:

Imaginez un monde où les êtres intelligents ne sont pas formés comme nous, mais forment une sorte de brouillard uniforme. Toutes les parties de ce brouillard sont des êtres vivants, ils communiquent entre eux, mais il n'y a pas d'individus, juste un tout inséparable. Eh bien, il n'y a aucune raison que la notion de nombre entier émerge chez les mathématiciens de cette espèce!

Finalement, les nombres entiers ne sont-ils pas qu'une construction mentale ayant émergé dans notre cerveau pour modéliser le monde tel que nous le percevons?

De même pour l'addition: elle semble naturelle, elle émerge lorsque nous mélangeons des cailloux. Pourtant, elle s'applique (par récurrence) à une infinité de nombres. Il n'existera donc jamais assez de cailloux pour représenter toutes les additions...

Alors, d'où viennent les additions si elles ne viennent pas des cailloux? Les nombres existent-ils? Les maths existent-elles? Les avons-nous **découvertes**, ou **inventées**?

C'est un débat millénaire, et nous n'allons pas le résoudre ici... Je vous laisse cette vidéo qui présente différents points de vue:

ÉLÉMENT EXTERNE (VIDEO) —

Consultez cet élément à l'adresse <https://www.youtube.com/embed/1EGDCh75SpQ?feature=oembed>.

J'aime particulièrement le point de vue des **fictionalistes**. Les maths seraient... **une belle histoire**, un peu comme nos contes et nos mythologies. Et tout comme les contes servent à émerveiller les enfants, et sont utiles à leur développement, les maths nous sont utiles à nous aussi... et peuvent nous émerveiller. Mais ne sont rien d'autre qu'une histoire, où les fées et les lutins sont remplacés par les exponentielles et les logarithmes...



Le monde mathématique ressemblerait-il à ça?

III.1.2. La beauté des mathématiques

Titre un peu provocateur... Comment peut-on trouver les mathématiques belles?

A la question d'un journaliste: «*Qu'appellez-vous une belle équation?*», Dirac a répondu: «*Si vous êtes mathématicien, vous savez ce que je veux dire. Si vous ne l'êtes pas, je ne peux pas vous l'expliquer*».

La réponse semble un peu élitiste, mais si vous réfléchissez, est-ce vraiment différent dans les autres domaines? Pourriez-vous m'expliquer ce qu'est une belle musique? Un beau tableau?...

Alors, qu'est-ce qui peut rendre les mathématiques belles? Elles ont l'air froides, austères, constituées de symboles incompréhensibles. Mais ne dirait-on pas la même chose d'une partition musicale? Des symboles froids, austères, incompréhensibles...

La différence, c'est qu'on peut apprécier une belle musique sans forcément comprendre ces symboles. Et on n'a pas besoin d'être historien d'art pour apprécier un beau tableau. Ce qui n'est malheureusement pas le cas en maths. La beauté mathématique est cachée dans ses équations, ses démonstrations,... Alors certes, il existe des objets mathématiques visuels, comme les fractales ou le nombre d'or, qui révèlent un peu cette beauté, ce qui explique qu'ils sont très présents dans la vulgarisation mathématique. Mais ils restent à mon sens très superficiels, ils ne nous font pas pénétrer au coeur du mystère.

J'espère avec ce tuto vous avoir fait un peu découvrir cette beauté: d'un paysage froid et austère ont émergé des structures, des coups de génie, des nouvelles dimensions,... Un peu comme une série de mots qui, mis bout à bout, se mettent soudain à raconter une histoire.

III.1.3. Le début d'un long voyage

Nous avons rencontré **des nombres, des opérations, des logarithmes, des équations...** Nous avons vu le lien qui les reliait. Nous sommes allés au-delà de **l'infini**, nous avons voyagé dans la **quatrième dimension...**

Mais ce n'est que le **début du voyage**. Il reste encore plein de choses passionnantes à découvrir: **les fonctions, les espaces vectoriels, la géométrie... et même les géométries.**

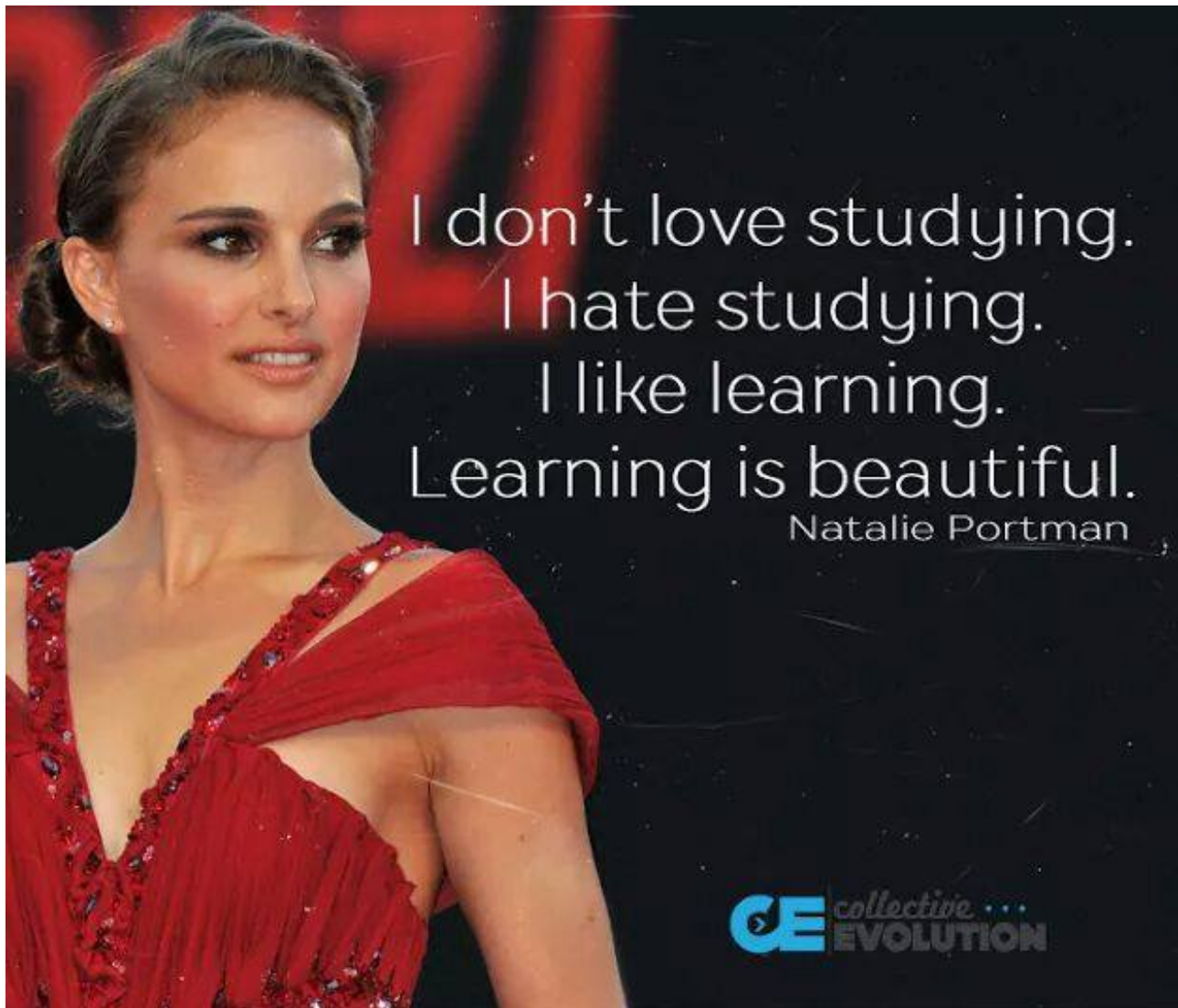
Plus vous avancerez dans votre voyage, plus vous découvrirez de liens entre tous ces objets. Nous venons d'ailleurs ici même de voir le lien entre nombres et géométrie.

Je compare toujours les mathématiques à une randonnée en montagne: au début, on visite des paysages complètement différents: des prairies, des forêts, des lacs,... puis on commence l'ascension du versant. C'est dur, avec parfois des passages très escarpés (très théoriques), mais quand on se retourne, le paysage est sublimé, on le voit d'un tout autre point de vue. Et quand on arrive au sommet,...

Voilà tout ce que je vous souhaite: continuer le voyage, être curieux, continuer à apprendre, à découvrir...

Apprendre... A ne surtout pas confondre avec "*étudier*": étudier, c'est chiant, c'est scolaire, c'est sanctionné par une note à la fin de l'année. Alors qu'**apprendre, c'est s'ouvrir à de nouveaux horizons.**

Malheureusement, peu de gens apprennent à faire la différence...



Et ce n'est pas moi qui le dit¹[footnote:1](#)

Je vous souhaite un bon voyage...

1. ²[footnote:1](#) C'est rare de croiser Nathalie Portman dans un cours de maths, alors profitez-en 🍊

III.2. Annexe

Introduction

i

Note: cette annexe raconte l'histoire de la découverte des nombres complexes, à travers la résolution de l'équation du troisième degré. Ces chapitres sont donc assez calculatoires. Si vous n'arrivez pas à tout suivre, pas de panique, cela ne vous empêchera pas de comprendre la suite.

III.2.1. Troisième degré

Après avoir dompté le second degré, les mathématiciens se sont naturellement penchés sur l'étape suivante: les équations du troisième degré. La forme générale semblant assez lourde, ils se sont tout d'abord penchés sur les équations de la forme suivante, sans terme en x^2 :

$$x^3 = px + q$$

On a un terme en x^3 d'un côté, qu'il faut évaluer avec un terme en x plus un terme constant. Comment, à partir d'un cube, faire apparaître des termes en x ? En **développant** un cube de la forme $(u + v)^2$.

Voilà l'idée géniale de Cardan. Il va faire ce qu'on appelle un **changement de variable**, en posant $x = u + v$. Ce qui donne:

$$(u + v)^3 = p(u + v) + q$$

$$u^3 + 3u^2v + 3v^2u + v^3 = p(u + v) + q$$

Essayons de retrouver une forme similaire de chaque côté de l'égalité, en factorisant par $(u + v)$:

$$3uv(u + v) + u^3 + v^3 = p(u + v) + q$$

$$\text{Ce qui nous donne } 3uv = p \text{ et } u^3 + v^3 = q$$

De nouveau, on obtient un système d'équations à deux inconnues, que nous savons maintenant résoudre, par **substitution**. Rappelez-vous, cette méthode consiste à utiliser une des équations pour exprimer v en fonction de u , et à réinjecter cette expression dans l'autre équation, pour n'avoir plus qu'une inconnue.

Ici, nous utiliserons la première équation, qui nous évite de voir apparaître des racines cubiques pour exprimer v . Ce qui nous donne $v = p/(3u)$. La substitution dans la deuxième équation nous donne:

III. La suite du voyage...

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q$$

En multipliant par u^3 de chaque côté, on obtient :

$$(u^3)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qu^3$$

$$(u^3)^2 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

?

Que voyons-nous apparaître? Une équation du second degré, de la forme $X^2 - qX - \frac{p^3}{27} = 0$, avec $X = u^3$

On peut donc la résoudre, puis remonter à x . Je ne vais pas détailler la résolution, vous la connaissez. On trouve X , puis on remonte à u , puis à v , puis enfin à x , notre inconnue initiale. Ce qu'on obtient s'appelle la **formule de Cardan**:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

×

En fait, une équation du troisième degré possède toujours trois solutions. La formule de Cardan en donne une seule, mais elle était suffisante pour les mathématiciens de l'époque. Certaines autres solutions sont des «**racines impossibles**» : elles étaient rejetées par les mathématiciens, ce qui est compréhensible, mais, chose qui nous paraît étrange aujourd'hui, ils rejetaient aussi les **solutions négatives**, comme étant non physiquement acceptables.

Remarquez ce qui se trouve sous la racine carrée. q^2 est toujours positif, mais p^3 peut être négatif. Ce qui se trouve sous la racine pourrait donc être négatif. Pour une équation du second degré, l'histoire s'arrêterait là: il n'y a pas de solution.

III.2.2. Des racines imaginaires

!

Mais voilà, l'histoire est légèrement différente de celle du second degré... Voyons pourquoi sur un exemple historique.

Lorsque Cardan décide de s'attaquer à trouver la méthode de résolution, il va tricher un peu: il va bidouiller une équation pour faire en sorte d'en connaître la solution à l'avance. Il saura donc que sa méthode de résolution est la bonne si elle lui permet de retrouver cette solution.

Il part de l'équation suivante:

$$x^3 = 15x + 4$$

dont il connaît la solution: 4.

Mais voilà, sa méthode, que nous avons détaillée ci-dessus, l'amène à un moment donné à devoir calculer l'expression suivante:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

III. La suite du voyage...

La conclusion semble sans appel: il n'y a pas de solution.

Oui mais voilà, ici, Cardan **sait** que son équation possède une solution. Sans se désarmer, il va donc considérer ces «racines impossibles» comme des vrais nombres.

Il fait donc le pari que ces racines cubiques doivent donner des nombres de la forme $u + \sqrt{-1}v$.

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = c + d\sqrt{-1}$$

Elevons les deux membres au cube dans la première équation:

$$2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3$$

$$= a^3 - b^3\sqrt{-1} + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2$$

$$= a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$$

Ce qui donne:

$$a(a^2 - 3b^2) = 2 \text{ et}$$

$$b(3a^2 - b^2) = 11$$

Remarquez que 2 et 11 sont premiers. Or, si a et b sont entiers (on n'en sait rien mais supposons), $(a^2 - 3b^2)$ et $3a^2 - b^2$ le sont aussi. Or un nombre premier, par définition, ne peut se décomposer en produits d'entiers, à part 1 et lui-même.

Or il se trouve que si on prend $a = 2$ (donc que $(a^2 - 3b^2)$ doit être égal à 1), on obtient $b = 1$ dans la première équation et si $b = 1$, on a bien $3a^2 - b^2 = 11$ dans la seconde.

Donc,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\text{De même, on trouve: } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Et là le miracle se produit: notre solution x est égale à $2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1}$, ce qui fait 4, qui est bien la solution recherchée!

Voilà donc que ces *racines imaginaires*, loin d'être inutiles, acquièrent une existence propre. Branle-bas de combat chez les mathématiciens: il va falloir apprendre à dompter ces nouveaux nombres.

i

Petit aparté avant d'en finir avec ces équations:

En fait, la résolution de la forme réduite permet de résoudre l'équation cubique générale. Et c'est au génie de Cardan qu'on le doit. Voyons son raisonnement:

Soit l'équation cubique générale $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

On aimerait enlever le terme en x^2 pour se ramener à la forme réduite que l'on vient de résoudre. Mais pour cela, il faut faire apparaître un autre terme en x^2 qui puisse annuler a_1x^2 .

Comment faire apparaître un carré à partir d'un cube? Nous l'avons fait tout à l'heure, il faut développer une expression de la forme $(u + v)^3$ ou $(u - v)^3$. Faisons donc comme tout à l'heure, un **changement de variable**.

Remplaçons x par $y - c$, avec c un nombre quelconque. Ce qui nous donne :

III. La suite du voyage...

$$x^3 = y^3 - 3cy^2 + 3c^2y - c^3$$

$$a_1x^2 = a_1y^2 - 2a_1cy + a_1c^2$$

$$a_2x + a_3 = a_2y - a_2c$$

Notre équation est la somme terme à terme de ces trois lignes.

Remarquez les termes en x^2 : si on prend $c = \frac{1}{3}a_1$, les termes s'annulent!

Notre équation se réduira donc à la forme résolue plus haut:


$$y^3 + py = q$$

Je vous laisse le plaisir de trouver l'expression de p et q en fonction de a_1 , a_2 et a_3 , c'est de l'algèbre élémentaire.

Conclusion

Il existe dans l'histoire des maths des moments de **pur génie**. Pour moi, la résolution de l'équation du 3^{me} degré est un de ceux-là. Rendez-vous compte: à partir d'outils algébriques de base, que vous et moi maîtrisons (développement, changement de variable, ...), Cardan est parvenu à construire un raisonnement d'une **créativité** remarquable. Fascinant et frustrant à la fois. Frustrant parce qu'on reste devant cette prouesse comme devant un tour de magie. Malgré la simplicité des outils utilisés, on reste fascinés par cette créativité.

C'est dans ces moments-là que les mathématiques se rapprochent plus de **l'art** que de la science. Comme un peintre qui utilise les mêmes couleurs que tout le monde, ou un Mozart qui utilise les mêmes notes que tout un chacun, le mathématicien arrive à produire une oeuvre unique et inimitable...

Par l'intermédiaire des neurosciences, les scientifiques essayent aujourd'hui de percer les mystères de cette créativité. Pour en savoir plus, je vous conseille ce tutoriel: [La créativité: l'innovation vue par la science](#) .

Conclusion

Conclusion

J'espère que vous aurez eu autant de plaisir à lire ce tutoriel que moi à l'écrire. Mais comme je vous l'ai dit, ce n'est que le début de votre grand voyage dans le pays des mathématiques.

Pour approfondir ce sujet, voici les livres qui m'ont servi pour l'écriture de ce tutoriel. Je ne peux que vous conseiller de vous les procurer.

- **Unknown quantity, A real and imaginary history of algebra**, *John Derbyshire*
L'algèbre est née le jour où un mathématicien est passé de «combien valent trois plus sept» à «trois plus combien valent sept», et n'a cessé de se développer depuis. Des premières équations à la topologie algébrique, en passant par les matrices, la théorie des groupes, les quaternions ou les espaces vectoriels, voici contée la formidable saga de l'algèbre...
- **Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis**, *Felix Klein*
Écrit par un célèbre mathématicien du début du XX^e siècle, ce livre aborde plusieurs notions mathématiques (dont les nombres complexes et hypercomplexes) avec une approche assez originale.
- **An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$** , *Paul Nahin*
Hamilton écrivit un jour à De Morgan: «Il faudrait qu'un jour toi ou moi - mais j'espère que ce sera toi - écrive une histoire de $\sqrt{-1}$ ». «Ce ne sera pas une mince affaire» répondra ce dernier. Aucun d'eux ne l'écrira au final, ni personne après eux d'ailleurs. Ce livre comble ce manque: de la résolution d'équations à l'analyse complexe, voici la fabuleuse histoire de i .
- **Mathematics and its history**, *John Stillwell*
Théorie des nombres, calcul différentiel, théorie des groupes, géométrie différentielle, nombres hypercomplexes... L'histoire des grands domaines des mathématiques est racontée ici avec brio, sans avoir peur de rentrer dans les détails techniques.