Micmaths

Les équations

6 septembre 2021

Table des matières

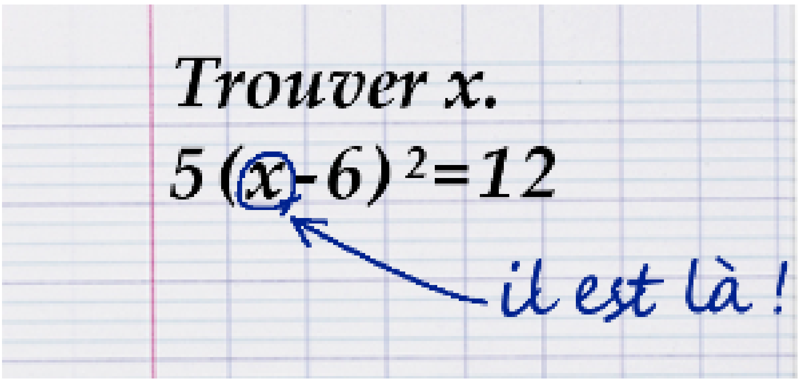
Introduction

Aimez-vous les devinettes? Si la réponse est oui, alors vous allez adorer les équations!

Les équations font souvent très peur quand on les apprend à l'école, et pourtant ce ne sont rien d'autres que des petites énigmes qui peuvent se révéler passionnantes à résoudre. Si on les prend par le bon bout et en connaissant les astuces qui existent pour venir à bout de leurs secrets, les équations peuvent devenir un jeu d'enfant!

Ce cours est précisément là pour ça! Que vous cherchiez à comprendre votre cours et à réviser votre prochain contrôle ou que vous soyez juste là pour le plaisir de faire des maths, vous trouverez ici tout ce qu'il vous faut. Nous allons repartir de zéro en commençant par expliquer ce qu'est une équation, puis nous verrons pas à pas les différents types d'équations et les méthodes qui existent pour les résoudre.

Vous êtes prêts? Alors partons ensembles sur la piste de ces mystérieuses inconnues...



Première partie

Présentation des équations

Introduction

Cette première partie est l'occasion de faire connaissance. Que sont les équations? À quoi ressemblent-elles? À quoi servent-elle? Vous allez tout savoir.

I.1. Qu'est-ce qu'une équation ?

Introduction

Alors c'est parti? Dans ce premier chapitre, nous allons tout reprendre depuis le début en commençant par voir ce que sont les équations, comment elles sont apparues dans l'histoire des mathématiques et comment on les écrit.

En route!

I.1.1. Qu'est-ce qu'une équation ?

Pour avoir une équation, il faut deux ingrédients:

— Une ou plusieurs inconnues. Comme leur nom l'indique, les inconnues sont des choses qu'on… ne connaît pas.
— Des informations sur les inconnues. Ces informations peuvent prendre différentes formes, nous allons y revenir en détail un peu plus tard.

À partir de là, le but du jeu est simple: retrouver la ou les inconnues à partir des informations. En fait, une équation, ce n'est rien d'autre qu'une devinette, mais une devinette mathématique, ce qui signifie que les inconnues sont des objets mathématiques, par exemple des nombres, des fonctions ou des figures géométrique.

Devinette classique	**Équation (devinette mathématique)**
Je commence la nuit. Je finis le matin. Et j'arrive deux fois dans l'année. Qui suis-je?	Je suis un nombre, Et je suis égal à ma moitié plus douze. Qui suis-je?

?

Alors avez-vous trouvé?

Prenez le temps d'y réfléchir, et si vous séchez, voici les solutions:

Contenu masqué n°1

Si vous n'avez pas trouvé, ce n'est pas très grave, nous verrons dans la deuxième partie de ce cours les méthodes qui existent pour résoudre à tous les coups ce genre d'équation. 🍊

I.1.1.1. Les équations réelles

Il existe en mathématiques de nombreux types d'équations selon la nature de l'inconnue. Voici quelques exemples:

— Les **équations diophantiennes** sont les équations dont l'inconnue est un nombre entier (c'est-à-dire un nombre sans chiffre après la virgule, comme le nombre 3, le nombre 27 ou encore 5678). Elles portent le nom du mathématicien grec Diophante .
— Les **équations fonctionnelles** dont les inconnues sont des fonctions.
— Les **équations géométriques**, dont les inconnues sont des figures géométriques. Nous verrons dans la troisième partie de ce cours que ces équations peuvent être vues comme des équations réelles à plusieurs inconnues.

Mais celles qui vont nous intéresser plus particulièrement dans ce cours, ce sont les **équations réelles**, c'est-à-dire les équations dont l'inconnue est un nombre réel.

> *i* Petit rappel pour ceux d'entre vous qui auraient des doutes, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels regroupe à la fois les nombres naturels (0; 1; 2; 3; ...), les nombres négatifs (-1; -2; -3; ...) et les nombres à virgule (2,45; 1,0001; -36,8; 3,1415...).

Avant de commencer à résoudre nous-même nos premières équations, nous allons faire un petit tour dans le passé dans la partie suivante pour voir ce qu'en pensaient les mathématiciens d'autrefois.

I.1.2. L'algèbre rhétorique

Si vous avez déjà rencontré des équations avant de lire ce cours, il est possible que pour vous ce soient des choses qui ressemblent à ça: $2x + 3 = 5$ ou $x^2 - 2x + 8 = 0$.

Pourtant, les mathématiciens n'ont pas toujours écrit leurs équations de cette façon et il a même fallu assez longtemps avant qu'ils éprouvent le besoin d'inventer un langage mathématique spécifique aux problèmes d'algèbre. À l'origine, les équations étaient tout simplement écrites en langage courant. C'est le cas par exemple de l'équation que je vous ai donnée au début de ce chapitre:

Je suis un nombre. Et je suis égal à ma moitié plus douze. Qui suis-je?

Cette façon d'écrire les équations, porte un nom: **l'algèbre rhétorique**.

I.1.2.1. Les babyloniens

Les plus anciennes équations que l'on connaisse nous viennent des babyloniens qui vivaient en Mésopotamie il y a près de 4000 ans. La tablette d'argile ci-dessous (portant le doux nom de BM 13901) est une sorte de manuel de résolution d'équations. Elle est divisée en différentes cases, chacune contenant un problème avec sa résolution.

Tablette BM 13901

La toute première ligne de la première case en haut à gauche dit ceci:

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 0,75.

En d'autres termes, il s'agit d'une équation dans laquelle l'inconnue est un nombre tel que si on lui additionne son carré, on obtient 0,75. Les trois lignes suivantes de la case détaillent la méthode de résolution avant d'arriver au résultat: 0,5. En effet, le carré de 0,5 est $0{,}5\times0{,}5=0{,}25$ et on a bien $0{,}5+0{,}25=0{,}75$. Trop forts ces babyloniens!

Ce type d'équation se nomme aujourd'hui une équation du second degré. Nous verrons pourquoi et nous apprendrons nous aussi la méthode de résolution dans la deuxième partie de ce cours.

Hélas, avec le déclin de la civilisation babylonienne, la plupart de ces connaissances en matière de résolution d'équations ont été oubliées et il faudra attendre le XXe siècle pour que toutes ces tablettes soient redécouvertes et que l'on réalise à quel point les babyloniens avaient été en avance.

I.1.2.2. Al-Khawarizmi

Le mathématicien perse Al-Khawarizmi (v. 783, v. 850) est souvent considéré comme le père de l'algèbre. Il fut en effet le premier à publier des ouvrages complets répertoriant différents types d'équations avec leurs méthodes de résolution. Son œuvre principale, ' (*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*) traite notamment des équations du premier et du second degré (nous verrons dans le prochain chapitre ce que cela signifie).

FIGURE I.1.1. – Al-Khawarizmi

Ces ouvrages sont entièrement écrits en algèbre rhétorique. L'inconnue y est nommée *la racine*, le carré de l'inconnu y est simplement nommé le carré et les nombres y sont écrits en toutes lettres.

La racine d'une équation est le nombre qui est caché, de la même façon que la racine d'une plante est sa partie qui est cachée dans la terre. Quand on cherche les différentes valeurs que peut valoir l'inconnue, on dit alors que l'on *extrait les racines*.

Voici un exemple d'équation étudiée par Al-Khawarizmi: *trois racines et quatre en nombre simple égalent le carré*. En d'autres termes, Al-Khawarizmi cherche ici un nombre tel que si on le multiplie par 3 et qu'on lui ajoute 4, alors on trouve son carré. Sauriez-vous trouver un tel nombre avant de regarder la solution?

Contenu masqué n°2

Aujourd'hui, il existe une différence d'utilisation entre les mots *inconnue* et *racine*. L'inconnue, c'est le nom que l'on donne de façon abstraite à ce que l'on ne connait pas tandis que les racines sont les valeurs concrètes qui sont solutions de l'équation. Par exemple, dans l'équation d'Al-Khawarizmi ci-dessus, il n'y a qu'une inconnue (on ne cherche qu'un seul nombre) mais il y a deux racines (il existe deux nombres qui satisfont l'équation). Cette différence de vocabulaire est un peu subtile, mais si ça ne vous parait pas encore très clair, ne vous inquiétez pas, ça viendra avec la pratique.

I.1.2.3. L'école italienne du XVIe siècle

Après Al-Khawarizmi, l'algèbre rhétorique perdure encore jusqu'au XVIe siècle. À cette époque, c'est en Italie que quelques mathématiciens vont pour la première fois trouver la méthode de résolution des équations du troisième degré.

Ces équations deviennent de plus en plus complexes et tout écrire en langue courante est de plus en plus lourd. En 1539, le mathématicien Tartaglia (1499,1557) a même l'idée d'écrire sa méthode de résolution en vers. Voici trois strophes extraites de ce poème mathématique.

Texte original (en italien)	Traduction
Quando chel cubo con le cose appresso Se agguaglia à qualche numero discreto Trouan dui altri differenti in esso. Dapoi terrai questo per consueto Che'llor produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo generale Delli lor lati cubi ben sottratti Varra la tua cosa principale.	Quand le cube et les choses Se trouvent égalés au nombre Trouves-en deux autres qui diffèrent de celui ci. Ensuite comme il est habituel Que leur produit soit égal Au cube du tiers de la chose. Puis dans le résultat général, De leurs racines cubiques bien soustraites, Tu obtiendras ta chose principale.

Pas très clair, n'est-ce pas? 🍊 Vous remarquez qu'à cette époque, l'inconnue est appelée *la chose*.

Plus les équations deviennent complexes, plus l'algèbre rhétorique devient pénible et handicapante pour la bonne compréhension des mathématiques. C'est pour cette raison qu'à cette époque, plusieurs mathématiciens commencent à imaginer un nouveau langage simplifié, plus efficace et sans ambiguïté dédié à l'écriture des équations et des problèmes d'algèbre.

Ce nouveau langage, nous allons maintenant le découvrir ensemble.

I.1.3. Un langage pour les équations

I.1.3.1. L'algèbre nouvelle

Nous avons vu qu'au début de l'histoire des équations, celles-ci étaient écrites en langage courant. Mais peu à peu, les mathématiciens vont se mettre à utiliser des abréviations et des symboles spécifiques pour écrire leurs problèmes d'algèbre. L'un des principaux artisans de ces transformations est le mathématicien français François Viète (1540,1603) qui lance à la fin du XVIe siècle un large programme de modernisation de l'algèbre.

FIGURE I.1.2. – François Viète

Les premières transformations que l'on voit apparaître consistent à remplacer les mots par des abréviations. Par exemple, les opérations plus et moins s'écrivent simplement p et m. Ce procédé est appelé **algèbre syncopée**. Au cours des XVe, XVIe et XVIIe siècles, ces notations vont subir de nombreuses autres transformations et variations selon les auteurs. Peu à peu, on voit apparaître les notations auxquelles nous sommes habituées aujourd'hui.

Voici la liste des principaux symboles mathématiques par ordre chronologique de leur apparition.

- Les symboles + et - pour l'addition et la soustraction sont introduits par le mathématicien allemand Johannes Widmann vers 1489.
- Le symbole = pour désigner l'égalité est introduit par le mathématicien gallois Robert Recorde en 1557.
- Le symbole $\times$ pour la multiplication est introduit par le mathématicien anglais William Oughtred en 1631.
- L'utilisation d'un exposant pour les puissances (par exemple 3^2) ainsi que le symbole $\sqrt{}$ pour la racine carrée sont introduits par le mathématicien français René Descartes en 1637.
- Le symbole $\div$ pour la division est introduit par le mathématicien suisse Johann Heinrich Rahn en 1659.

Vous pouvez constater que la nouvelle écriture de l'algèbre est le produit d'apports de nombreux mathématiciens de nationalités différentes. Les maths sont un travail d'équipe!

?

Et l'inconnue? Que devient l'inconnue dans cette nouvelle algèbre?

Comme tous les éléments des équations, sa notation va être simplifiée. L'inconnue reçoit alors un nom très simple composé d'une seule lettre! François Viète a été le premier à désigner l'inconnue par une unique lettre, mais c'est René Descartes qui va pour la première fois utiliser celle qui va devenir la plus utilisée: x.

#Quelques exemples de traductions

Dès lors, toutes les équations peuvent se traduire dans le nouveau langage de l'algèbre. Cette traduction rend les équations bien plus courtes et élimine les ambiguïtés liées au langage courant. Voici un tableau donnant quelques exemples de traduction d'équations de l'algèbre nouvelle en algèbre rhétorique.

Écriture moderne	**Traductions rhétoriques**
$x = x \div 2 + 12$	— Je suis un nombre. Et je suis égal à ma moitié plus 12. Qui suis-je?
$x + 1 = x^2$	— Si on m'ajoute un, on obtient mon carré. — La chose augmentée de un est égale au carré.

$x{-}2 = 2 \times (x{-}3)$	— Si on me retranche deux, on obtient le double de ce que l'on obtiendrait en me retranchant 3. — La chose moins deux égale le double de la chose moins trois.
$((x{-}2) \div 2 + 2) \times 2 = 4$	— Si on m'enlève deux puis qu'on me divise par deux, puis qu'on m'ajoute deux, puis qu'on me multiplie par deux, on obtient quatre. — La chose moins deux divisée par deux plus deux fois deux égale quatre.
$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5$	— L'addition de mon tiers et de ma moitié donne 5. — Une demi chose et un tiers de chose égalent cinq.
$\frac{1}{x} = x^2$	— Mon inverse est égal à mon carré.

Prenez bien le temps de décortiquer ces différents exemples pour bien comprendre comment les équations s'écrivent dans le langage moderne de l'algèbre. C'est ce langage que nous allons utiliser dans la suite de ce cours, il est donc important d'apprendre à maîtriser son fonctionnement.

Contenu masqué

Contenu masqué n°1

Pour la devinette classique, la réponse est la lettre N qui se trouve au début du mot Nuit, à la fin du mot matiN et deux fois dans le mot aNNée.

Pour l'équation, la réponse est 24. En effet, la moitié de 24 est égal à 12 et si on fait 12+12, on retrouve bien 24. Retourner au texte.

Contenu masqué n°2

En réalité, cette équation d'Al-Khawarizmi possède deux solutions: 4 et -1. En effet:

— 4×3+4=16 et 16 est bien le carré de 4;
— (-1)×3+4=1 et 1 est bien le carré de -1.

Eh oui, c'est comme ça: une équation peut avoir plusieurs solutions. Retourner au texte.

I.2. Premières manipulations d'équations

Introduction

Nous savons maintenant ce qu'est une équation, il est donc temps d'apprendre à les résoudre. Pour cela, nous allons voir dans ce chapitre les différentes manipulations, transformations et simplifications de base que l'on peut faire subir à une équation pour lui extraire son inconnue.

I.2.1. Remonter vers l'inconnue

I.2.1.1. Opérations réversibles

Les équations les plus simples à résoudre sont celles dans lesquelles l'inconnue ne subit que des transformations facilement réversibles. Pour comprendre ce que cela signifie, regardons l'équation suivante:

$$x + 5 = 16.$$

En algèbre rhétorique la même équation donnerait ceci: quel nombre donne 16 si on lui ajoute 5? Un peu de réflexion, permet de trouver la solution sans trop de problème: $x = 11$, en effet, $11 + 5 = 16$.

Si cette équation est simple à résoudre, c'est parce que l'inconnue ne subit qu'une seule opération: une addition. Or l'addition est une opération qui permet de revenir en arrière facilement: il suffit de faire une soustraction. Pour trouver la solution, on a simplement fait $16 - 5 = 11$, car la soustraction est l'opération inverse de l'addition.

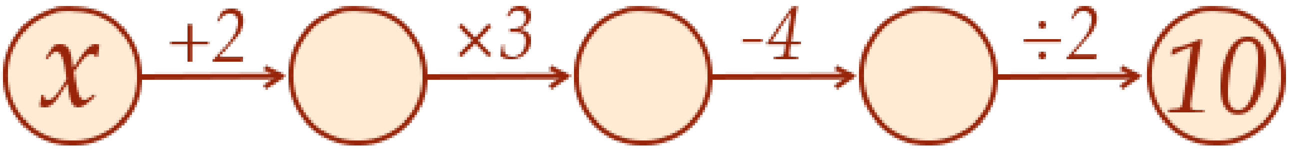
En fait, les quatre opérations de base sont facilement réversibles:

- une addition s'inverse avec une soustraction;
- une soustraction s'inverse avec une addition;
- une multiplication s'inverse avec une division;
- une division s'inverse avec une multiplication.

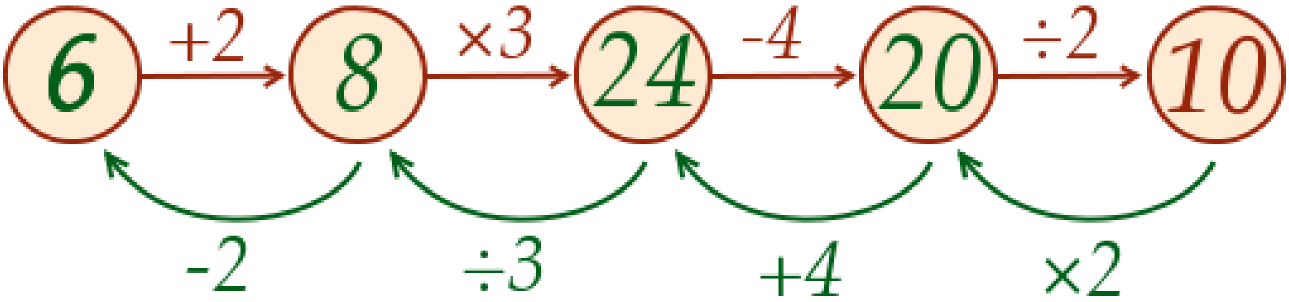
Par conséquent, si dans une équation, l'inconnue ne subit que ces quatre opérations de base, alors la solution est facile à trouver. Regardons par exemple l'équation suivante:

$$((x + 2)\times 3 - 4)\div 2 = 10.$$

L'inconnue x subit successivement chacune des quatre opérations pour aboutir à 10. Cette équation peut se représenter par le schéma suivant.



Pour résoudre cette équation, il suffit alors de refaire le chemin à l'envers en partant du 10 et en inversant chacune des opérations.



Et voilà le travail! L'équation est résolue: la solution est $x = 6$. Si vous n'y croyez pas, remplacez le x par 6 dans l'équation de départ et vous verrez que ça marche:

$$((6 + 2)\times 3—4)\div 2 = 10.$$

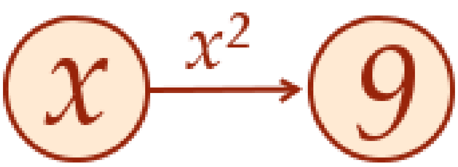
I.2.1.2. Complications

I.2.1.2.1. Les puissances

Tant que l'on a que les quatre opérations de base dans notre équation, tout se passe donc plutôt bien. Les choses commencent à se compliquer dès que les puissances apparaissent. Le problème avec les puissance c'est qu'elles ne sont pas réversibles de façon unique. Regardons par exemple l'équation suivante:

$$x^2 = 9.$$

Cette équation peut se représenter de la façon suivante:



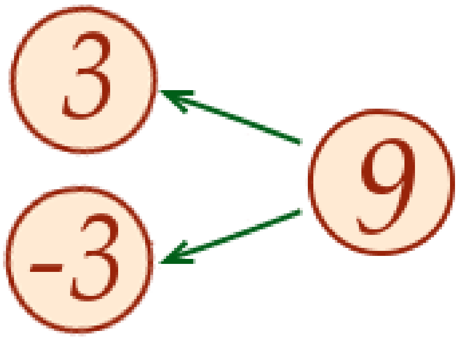
? Comment faire alors pour revenir à x en connaissant x^2?

Spontanément, on a envie de répondre que la réponse se trouve grâce à la racine carrée. En effet, $\sqrt{9} = 3$ est bien solution à notre équation: si on remplace x par 3, on a bien $3^2 = 9$.

Seulement voilà, en faisant ça, on a oublié une solution: -3. En effet, on a également $(-3)^2 = 9$. Un nombre strictement positif possède toujours deux racines carrées et le symbole $\sqrt{\ }$ sert à désigner celle des deux qui est positive.

I. Présentation des équations

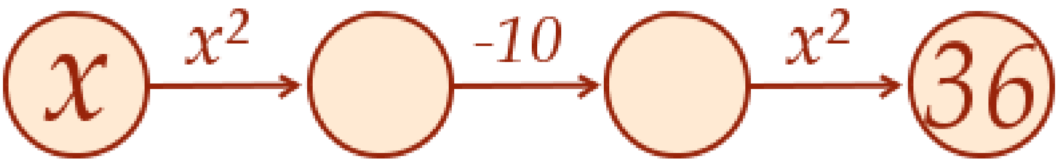
Le carré nous permet donc de découvrir une nouvelle facette des équations: une équation peut avoir plusieurs solutions. En l'occurrence, l'équation $x^2 = 9$ possède deux solutions, -3 et 3. Cela peut se représenter de la façon suivante.



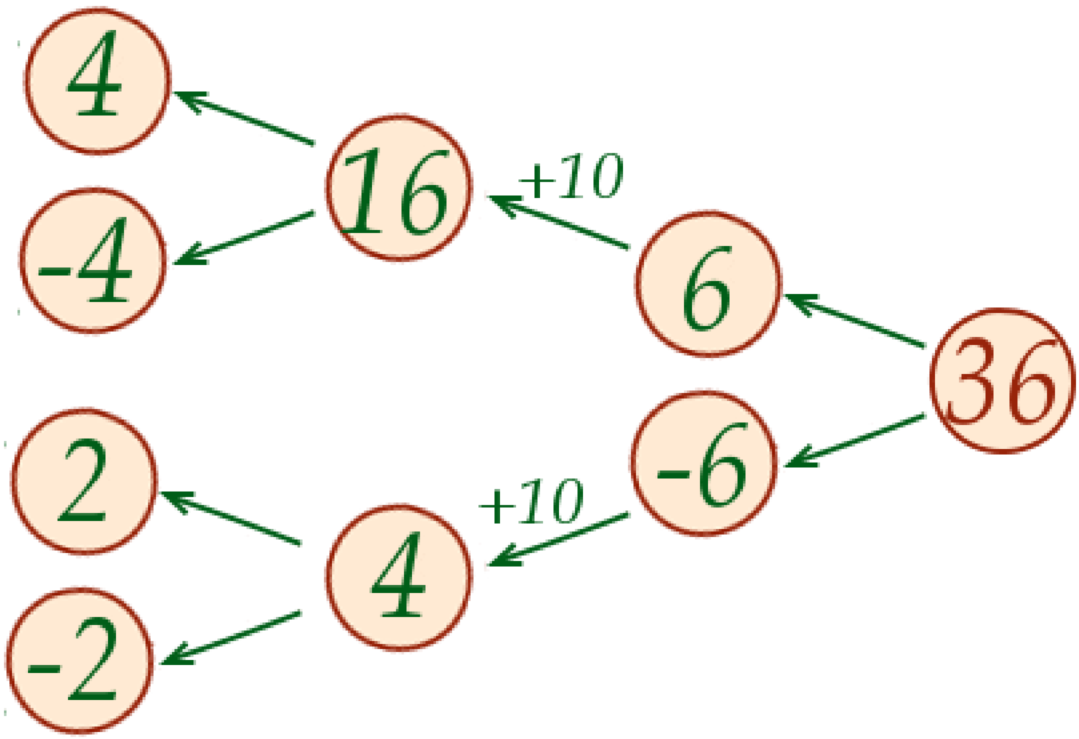
Une fois que l'on a compris cela, on peut trouver des équations avec de multiples solutions en ajoutant des carrés. Regardons par exemple l'équation suivante:

$$(x^2 - 10)^2 = 36.$$

On peut la représenter comme ceci:



Puis, le schéma suivant permet de trouver ses solutions:



Il y a deux carrés dans l'équation, les solutions se dédoublent donc deux fois. Ainsi, l'équation possède quatre solutions: -4, -2, 2 et 4.

En multipliant le nombre de carrés dans l'équation, on multiplie à chaque fois le nombre de solutions. Avec ce procédé, vous pouvez donc imaginer des équations ayant autant de solutions que vous voulez.

I.2.1.2.2. Quand les x sont plusieurs

Là où ça se complique vraiment, c'est quand les x commencent à être plusieurs dans l'équation. Prenons par exemple l'équation suivante:

$$x^2 + x = 2.$$

Cette fois, la méthode précédente ne marche pas. En effet, l'inconnue x apparaît deux fois, ce qui rend impossible la remontée vers l'inconnue en appliquant simplement des opérations inverses.

> !
>
> Si vous vous creusez un peu la tête peut-être arriverez vous à trouver les solutions de l'équation ci-dessus. Il y en a deux: 1 et -2. Cependant, ce qui nous importe, ce n'est pas d'avoir les solutions de cette équation en particulier mais plutôt des méthodes pour pouvoir résoudre de façon systématique les équations de ce type. Ici, les solutions sont des nombres entiers donc on peut les deviner en cherchant un peu mais s'il s'agissait de nombres plus compliqués il deviendrait impossible de les débusquer uniquement en observant l'équation.

Ce genre d'équation est beaucoup plus subtile et demande l'utilisation de techniques plus avancées. Mais même ces techniques ne marchent pas à tous les coups: il existe certaines équations pour lesquelles même les mathématiciens d'aujourd'hui ne connaissent pas de méthode générale pour calculer les solutions! Nous verrons ceci dans la deuxième partie de ce cours.

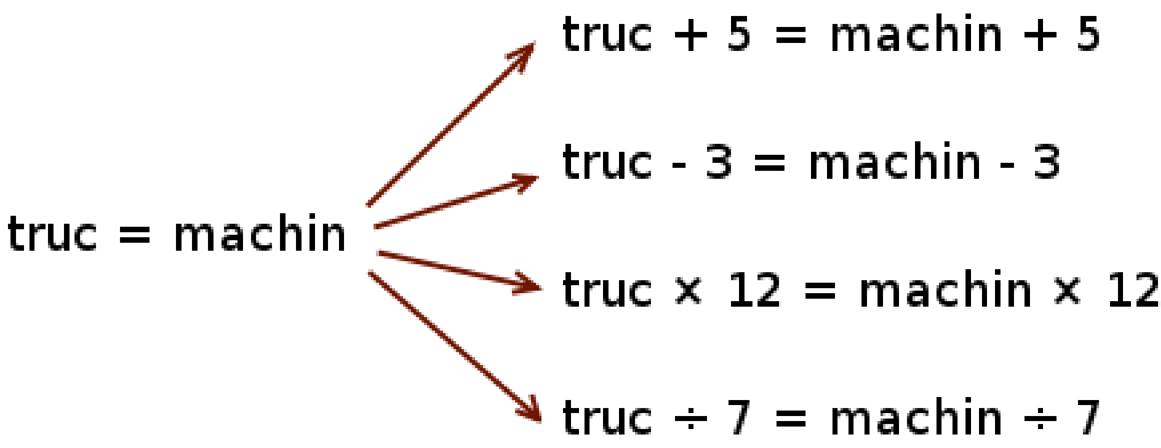
I.2.2. Transformons les équations

I.2.2.1. La règle fondamentale de manipulation des équations

La règle fondamentale de manipulation des équations est la suivante:

> On ne change pas les solutions d'une équation en appliquant la même transformation réversible à ses deux termes.

Prenons encore une fois l'exemple des quatre opérations de base, dont nous avons déjà vu qu'elles étaient réversibles. Alors, si on a une équation, on peut lui ajouter, lui soustraire, la multiplier ou la diviser par un nombre quelconque.



> **!** Attention à une petite exception, vous savez qu'il est impossible de diviser par zéro. Par conséquent, il n'est pas possible de diviser une équation par 0 et cela entraîne également que la multiplication par 0 n'est pas réversible.

Pour illustrer l'utilité de cette règle, reprenons l'exemple de la première équation que nous avons vue au début de ce chapitre:

$$x + 5 = 16.$$

Alors, il est possible de faire l'opération -5 de chaque côté de l'équation, on obtient alors:

$$x + 5 - 5 = 16 - 5.$$

Les +5–5 s'annulent à gauche, ce qui donne au final:

$$x = 11.$$

Cette manipulation nous a permis d'isoler le x et donc de résoudre l'équation. Bon, dans ce cas, ce n'est pas révolutionnaire comme méthode vu que la solution est vraiment simple à trouver et que nous la connaissions déjà, mais nous allons voir par la suite que sur des équations plus compliquées, cela permet de simplifier beaucoup de choses.

I.2.2.1.1. Quand les termes changent de côté

Ce genre de transformation permet de faire changer de côté certains termes des équations. Imaginons que l'on a une équation de la forme suivante:

$machin + truc = bidule

Et supposons que pour résoudre l'équation, il soit préférable que "truc" se trouve de l'autre côté de l'égalité. Alors il est possible de le soustraire des deux côtés et on obtient ceci:

$machin + truc − truc = bidule − truc

On voit alors que les trucs s'annulent dans le terme de gauche, on obtient donc ceci:

$machin = bidule − truc

Remarquez cette chose amusante: en passant de l'autre côté, le signe du truc a changé, c'était un + et c'est devenu un −.

La règle, est donc la suivante: *quand un terme est additionné ou soustrait d'un côté d'une équation, on peut le faire passer de l'autre côté en changeant son signe*. Autrement dit, en passant de l'autre côté du signe $=$, les additions se transforment en soustraction et inversement.

$$\text{machin} + \text{truc} = \text{bidule} \iff \text{machin} = \text{bidule} - \text{truc}.$$

Notez l'utilisation du symbole ⇔ dans la résolution ci-dessus. Il s'agit du symbole d'équivalence qui signifie ici que les deux équations peuvent se déduire l'une de l'autre.

La même chose est vraie pour la multiplication et la division.

$$\text{machin} \times \text{truc} = \text{bidule} \iff \text{machin} = \text{bidule} \div \text{truc}.$$

Dans ce cas là, il faut toutefois vérifier avant de faire la transformation que truc n'est pas égal à 0 car la division par 0 est impossible.

I.2.2.2. Quelques complications

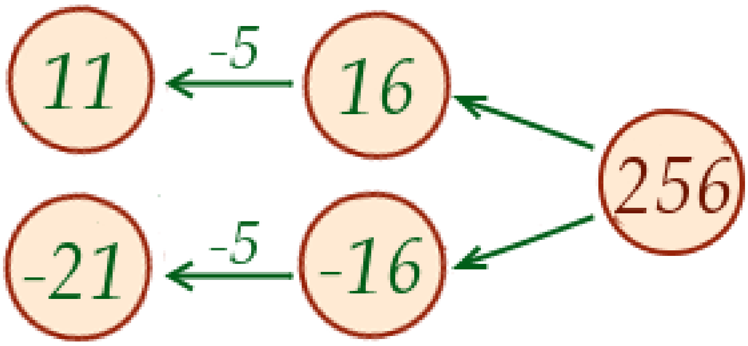
I.2.2.2.1. Opérations non réversibles

La règle précise que l'opération effectuée des deux côtés doit être réversible. Mais alors que se passe-t-il si ce n'est pas le cas?

Pour l'instant, nous connaissons principalement une opération non réversible: le carré. Reprenons donc notre équation $x + 5 = 16$ et appliquons-lui un carré:

$$(x+5)^2 = 16^2 = 256.$$

À première vue, ça n'a pas changé grand chose, le nombre 11 est toujours solution: $(11+5)^2=256$. Pourtant, si on y regarde d'un peu plus près, on se rend compte que le carré a fait apparaître une autre solution. En effet, si on remonte vers l'inconnue comme nous l'avons fait dans la section précédente, on obtient le schéma suivant:



Après avoir pris le carré, on voit donc apparaître comme par magie une nouvelle solution, -21, qui n'est absolument pas solution de notre équation de départ.

Il faut donc retenir ceci: on a le droit d'appliquer des transformations non réversibles, mais ceci peut entraîner l'apparition de nouvelles racines! Donc attention, si vous utilisez ce genre de transformation, il faut à la fin de la résolution faire le tri entre les bonnes solutions et les mauvaises.

I.2.2.2.2. Opérations impossibles

Il y a une deuxième chose dont il faut se méfier quand on transforme des équations, ce sont les opérations impossibles. Prenons l'exemple de l'équation suivante:

$$x = x^2.$$

Nous cherchons donc un nombre égal à son carré. En voyant cette équation, on peut être tenté de diviser par x des deux côtés. On obtient alors:

$$1 = x.$$

Et hop, on a résolu l'équation: le nombre que l'on cherche est 1 qui est bien égal à son carré.

La solution trouvée est juste, oui mais voilà, en y regardant d'un peu plus près, on se rend compte qu'on a oublié une solution: 0. En effet, 0 est également égal à son carré. Mais alors à quel moment l'a-t-on oublié?

Le 0 a sauté au moment où on a fait la division. Une division par 0 n'est pas possible de sorte que la transformation que nous avons effectuée pour passer à $1 = x$ n'est valable que si x est non nul. En faisant cette étape, nous avons donc oublié le 0 en route.

I.2.2.2.3. Récapitulons

En bref, voici un résumé en trois points de ce que nous venons de voir:

— si l'opération est réversible, alors les solutions sont exactement les mêmes;
— si l'opération n'est pas réversible, alors il est possible que de nouvelles solutions apparaissent au cours de la transformation;
— si l'opération possède des valeurs impossibles, alors il est possible que des solutions disparaissent au cours de la transformation.

I.2.3. Toutes les équations valent zéro

Au IXe siècle, Al-Khawarizmi étudia les équations ne faisant intervenir que des nombres, des multiples de l'inconnue (par exemple $7x$) et des multiples du carré de l'inconnu (par exemple $2x^2$). Ces équations s'appellent des équations du second degré. Seulement à son époque, les nombres négatifs étaient encore mal maîtrisés, et Al-Khawarizmi ne s'autorisait que les termes positifs et sans signe négatif. Par exemple, pour lui, $3x^2 + 6 = 3x$ ne pose pas de problème, mais il ne considère pas d'équations de la forme $-x^2 + 2 = -3x$.

Cette contrainte l'obligeait à distinguer 6 type d'équations différentes qu'il nommait de la façon suivante:

- les carrés égalent les racines, par exemple $3x^2 = 5x$;
- les carrés égalent les nombres, par exemple $3x^2 = 2$;
- les racines égalent les nombres, par exemple $5x = 2$;
- les carrés et les racines égalent les nombres, par exemple $3x^2 + 5x = 2$;
- les carrés et les nombres égalent les racines, par exemple $3x^2 + 2 = 5x$;
- les racines et les nombres égalent les carrés, par exemple $5x + 2 = 3x^2$;

Al-Khawarizmi traite donc ces six cas séparément et donne pour chacun une méthode de résolution différente. Pas très pratique tout ça.

I.2.3.1. Tous à babord !

Grâce à ce que nous avons vu et à l'utilisation des nombres négatifs, il est possible de réduire toutes ces équations à un seul type, en passant tous les termes du même côté de l'égalité. À gauche par exemple.

Par exemple, si on a l'équation suivante $3x^2 + 2 = 5x$, il est possible de passer le $5x$ de l'autre côté de façon à obtenir $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

En utilisant ce procédé, toutes les équations d'Al-Khawarizmi se réduisent à un seul type:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

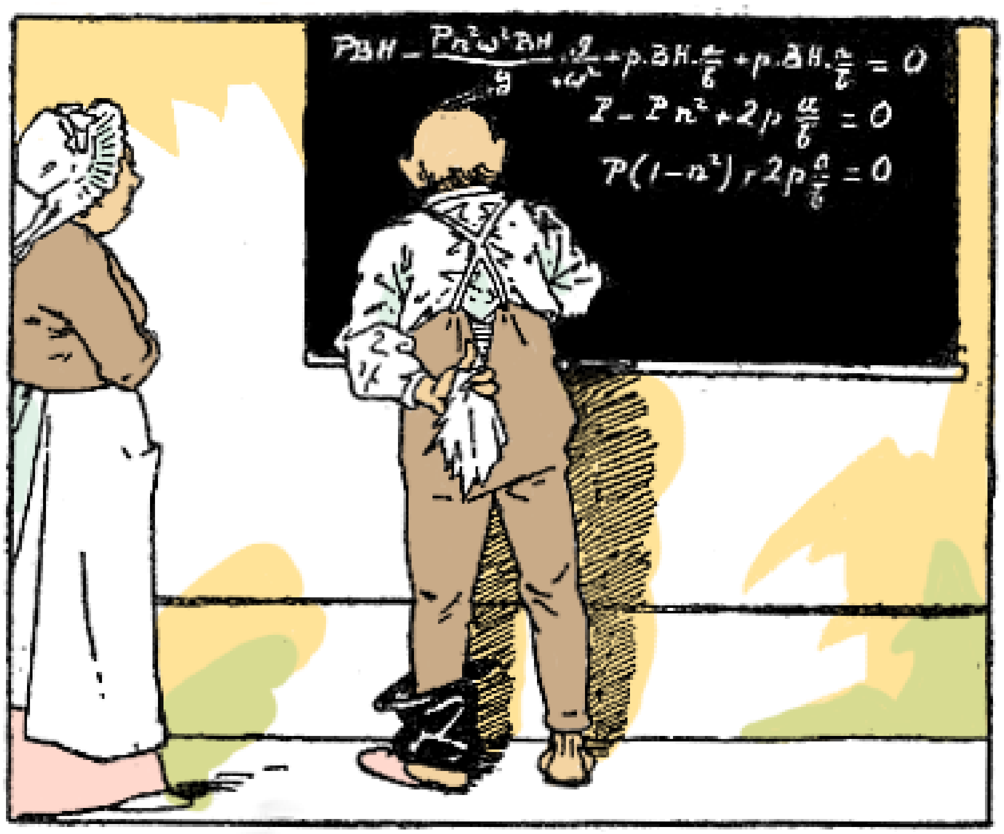
où a, b et c sont des nombres quelconques. Par exemple dans l'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$, on a $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.

Mine de rien, cette petite opération va considérablement nous simplifier la tâche, car grâce à ça, nous allons pouvoir résoudre toutes les équations du second degré grâce à une seule et même méthode! Nous verrons cette méthode dans la seconde partie de ce cours.

C'est pour cette raison que la plupart du temps, une des première chose que l'on fait avec une équation, c'est de passer tous les termes du même côté de façon à réduire au maximum le nombre de cas à étudier. Ceci vaut pour les équations du second degré, mais également pour de nombreux autres types d'équations. En bref, si on a une équation du type truc = machin, on s'empresse de faire passer machin de l'autre côté:

$$\text{truc} - \text{machin} = 0.$$

Pour terminer cette section, voici une case issue de la bande dessinée L'idée fixe du savant Cosinus , parue en 1893 (à cette époque il n'y avait pas de bulles, les textes étaient écrits en dessous de la case). Le savant Cosinus est en train de résoudre des équation sous l'œil de sa servante Scholastique.



Cosinus se remet à étudier l'équilibre des corps en mouvement. Scholastique n'arrive pas à comprendre l'utilité qu'il peut y avoir à écrire des tas de choses pour arriver à mettre dans le bout : = 0. Autant vaudrait, à son avis, ne pas les écrire. Mais, en matière de sciences, l'opinion de Scholastique est négligeable.

Normalement, vous devriez maintenant être capable d'expliquer à Scholastique pourquoi toutes les équations de Cosinus sont égales à 0.

I.2.4. Les équations par degré

Nous venons de voir que dans la résolution des équations, les quatre opérations ne posent pas de problèmes car elles sont réversibles. Les difficultés se présentent lorsque des puissances apparaissent. Pour cette raison, les équations sont traditionnellement classées selon les puissances qui y sont présentes.

I.2.4.1. Équations polynomiales

I.2.4.1.1. Équations du premier degré

Une équation qui ne fait intervenir que x (c'est-à-dire x^1) et des nombres reliés par les quatre opérations se nomme une **équation du premier degré**.

> ? Mais alors, ça ressemble à quoi concrètement, une équation du premier degré?

Si on s'en tient à la définition, voici un exemple d'équation du premier degré:

$$(x-6)\times(-1)+4=(2x+3)\div 7.$$

Ceci est effectivement une équation du premier degré. Mais sa forme peut-être considérablement simplifiée grâce à plusieurs astuces.

- **Astuce 1.** Il est possible de se contenter de deux opérations: l'addition et la multiplication. En effet, une soustraction est simplement un addition par l'opposé et une division est une multiplication par l'inverse. Par exemple, soustraire 6, c'est ajouter (-6) et diviser par 7, c'est multiplier par 1/7.
- **Astuce 2.** Grâce à ce que nous avons vu dans la section précédente, nous pouvons regrouper tous les termes du même côté, le terme de droite restant égal à 0.
- **Astuce 3.** Il est possible de supprimer les parenthèses grâce à la distributivité. Si par exemple, on a l'équation $3\times(x+2)=0$, cela devient en développant $3x+6=0$.

> i Petit rappel, si vous avez oublié ce qu'est la distributivité, il s'agit d'une transformation qui dit que $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

Au final, après toutes ces simplifications, notre équation se résume donc à au plus une addition et une multiplication qui sont toutes les deux du même côté de l'égalité. La forme générale d'une équation du premier degré est donc:

$$ax+b=0,$$

où a et b sont deux nombres quelconques qui peuvent être positifs ou négatifs. Par exemple, les équations suivantes sont du premier degré:

- $3x+2=0$;
- $-2x+87=0$;
- $0,12x-2,8=0$.

Allez, un petit défi: essayez de mettre sous la forme $ax+b=0$, l'équation de tout à l'heure:

$$(x-6)\times(-1)+4=(2x+3)\div 7.$$

Prenez bien le temps de chercher par vous-même avant de regarder la réponse:

Contenu masqué n°3

I.2.4.1.2. Équations du second degré

Une équation dont toutes les puissances de x sont inférieures ou égales à 2 (x et x^2) se nomme une **équation du second degré**.

Toutes les astuces de simplification que nous avons vues pour les équations du premier degré restent vraie pour le second degré. Ainsi, la forme générale d'une équation du second degré est

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Par exemple $x^2 + 3x - 4 = 0$ est une équation du second degré avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.

I.2.4.1.3. Équations du troisième degré

Vous commencez à comprendre le principe. Une équation dont toutes les puissances de x sont inférieures ou égales à 3 (x, x^2 et x^3) se nomme une équation du troisième degré.

La forme générale d'une équation du troisième degré est:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Par exemple $2x^3 - x + 5 = 0$ est une équation du troisième degré avec $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = 5$.

I.2.4.1.4. Et ainsi de suite

On continue ainsi aussi longtemps qu'on veut. Voici quelques exemples:

— l'équation $x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 8 = 0$ est du quatrième degré;
— l'équation $-2x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 8 = 0$ est du cinquième degré;
— l'équation $0,01x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 8 = 0$ est du sixième degré…

Je m'arrête ici, je pense que vous avez compris le principe. Toutes ces équations se nomment des **équations polynomiales**. Ce sont donc les équations qui font intervenir les quatre opérations de base et des puissances de x.

Contenu masqué

Contenu masqué n°3

Commençons par transformer la division par 7 en multiplication par 1/7 pour pouvoir développer.

$$(x-6) \times (-1) + 4 = (2x+3) \times \frac{1}{7}.$$

Maintenant, on peut supprimer les parenthèses en développant.

$$-x + 6 + 4 = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}.$$

Puis on passe tout du même côté (en n'oubliant pas d'inverser les signes):

$$-x + 6 + 4 - \frac{2}{7}x - \frac{3}{7} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à faire les additions et les soustractions:

Pour ce qui est des nombres sans x, on a:

$$6 + 4 - \frac{3}{7} = 10 - \frac{3}{7} = \frac{70}{7} - \frac{3}{7} = \frac{67}{7}.$$

Notez que nous avons utilisé un passage au même dénominateur pour calculer la somme des fractions. Pour les x, on a

$$-x - \frac{2}{7}x = -\frac{9}{7}x.$$

Au final, l'équation s'écrit donc: $-\frac{9}{7}x + \frac{67}{7} = 0$. Et voilà le travail! On a donc a=−9/7 et b=67/7. Si vous n'avez pas fait les étapes dans le même ordre, ce n'est pas important, il y a plusieurs façon de s'y prendre. Notez d'ailleurs que même si nous sommes maintenant sous la forme standard, il est encore possible de rendre l'écriture de cette équation plus simple en multipliant par 7 des deux côtés. Cela fait disparaître les fractions:

$$-9x + 67 = 0.$$

Retourner au texte.

I.3. TP : Inventons des équations !

Introduction

Dans ce chapitre, je vous propose de nous amuser à inverser le principe des équations. Normalement le but du jeu est de trouver les solutions à partir d'une équation, mais que diriez vous d'essayer de trouver les équations à partir des solutions?

Inventer des équations est une très bonne façon de comprendre comment elles fonctionnent en les décortiquant dans les moindre détails. Les inventeurs sont toujours les mieux placés pour réparer leurs inventions, donc les gens qui savent construire des équations sont bien meilleurs pour les résoudre.

I.3.1. Avec une solution

Nous allons commencer simplement en cherchant des équations n'ayant qu'une seule solution.

?

Trouvez une équation dont la solution est 17. Même question pour 12345.

Note: il s'agit d'une question toute simple et il y a de nombreuses réponses possibles, ne vous cassez pas la tête à donner une équation très compliquée, ça viendra dans les questions suivantes.

Contenu masqué n°4

?

Trouvez une équation sans divisions ni nombres à virgule dont la solution est 4,5.

Cette fois, la question est un peu plus subtile à cause de l'interdiction des nombres à virgule et des divisions. Nous n'avons donc pas le droit de répondre une des équations simples suivantes:

— $x + 1 = 5, 5$;
— $x = 9 \div 2$.

Pourtant la solution n'est pas si compliquée que ça. Cherchez un peu par vous même avec de regarder la solution.

👁 Contenu masqué n°5

?

Trouvez une équation sans division ni nombres à virgule dont le terme de droite est égal à 0 et dont la solution est égale à 3,72.

👁 Contenu masqué n°6

C'est tout pour les équations à une solution. Dans la section suivante on complique un peu en passant à deux solutions.

I.3.2. Avec deux solutions

?

Trouvez une équation dont les deux solutions sont -2 et 2. Même question pour -7 et 7.

Nous avons déjà vu ce type d'équation dans le chapitre précédent, alors si vous séchez, n'hésitez pas à retourner y jeter un oeil avant de regarder la solution.

👁 Contenu masqué n°7

?

En modifiant un peu votre équation dont les solutions sont -2 et 2, trouvez une équation dont les solutions sont -1 et 3.

👁 Contenu masqué n°8

?

En utilisant un principe similaire à celui de la question précédente, trouvez une équation dont les solutions sont -3 et 11. Sauriez-vous expliquer de manière générale comment obtenir une équation dont les deux solutions sont deux nombres quelconques α et β?

👁 Contenu masqué n°9

Nous voilà rodés avec deux solutions! Dans la section suivante, on passe à des équations ayant n'importe quel nombre de solutions. 🍊

I.3.3. Multiplions les solutions

?

L'équation $x^3-2x^2-3x = 0$ possède trois solutions qui sont -1, 0 et 3. L'équation $x^2 + 2x-35 = 0$ possède deux solutions qui sont -7 et 5. À partir de ces deux équations, construisez une équation ayant les cinq solutions: -7, -1, 0, 3 et 5.

Si vous en avez le courage vous pouvez vérifier que je ne vous mens pas et que les équations que je vous donne ont bien les solutions annoncées. Nous verrons à la fin de ce chapitre comment j'ai fait pour construire ces deux équations.

Et si vous séchez, voici un petit indice: l'astuce à utiliser pour résoudre cette question est toute simple mais pas si facile que ça à trouver quand on ne la connaît pas. Il suffit de relier les deux équations par une simple opération. Je vous laisse chercher laquelle.

Contenu masqué n°10

?

Trouvez dix petites équations dont les solutions sont respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, puis combinez ces dix équations de façon à obtenir une seule grande équation ayant les dix solutions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Contenu masqué n°11

?

En réutilisant le principe de la question précédente, sauriez-vous maintenant expliquer comment ont été construites les deux équations de la première question de cette section dont les solutions sont -1, 0 et 3 pour la première et -7 et 5 pour la seconde?

Contenu masqué n°12

?

La méthode que nous venons de voir permet de construire des équations ayant deux solutions d'une façon différente de celle que nous avons vue dans la section précédente. Sauriez-vous prouver que les deux méthodes donnent en fait exactement la même équation, mais présentée différemment?

Contenu masqué n°13

Conclusion

Voilà, ce TP est terminé. Si vous avez trouvé les dernières questions un peu dures, ne vous en faites pas, il faut bien quelques questions plus difficiles pour faire plaisir à tout le monde. Vous allez voir que nous allons retrouver plusieurs fois ces différentes formes d'équations dans la seconde partie de ce cours et vous aurez tout le temps de tout comprendre.

Contenu masqué

Contenu masqué n°4

Comme vous vous en doutez certainement, il y a énormément de réponses possibles. Une des plus simples que l'on puisse imaginer consiste à dire que 17 est le nombre qui donne 18 si on lui ajoute 1:

$x + 1 = 18$.

Et voici quelques unes des nombreuses autres réponses qui marchent.

— $x + 2 = 19$;
— $x + 3 = 20$;
— $x + 1000000000 = 1000000017$;
— $x-17 = 0$;
— $x-117 = -100$;
— $x \times 2 = 34$;
— $10x = 170$;
— $x \div 5 = 3,4$;
— $x \times 100 + 3 = 173$.

Bon, je m'arrête là, vous avez compris le principe. On pourrait en inventer autant qu'on veut sur le même principe.

Le principe est exactement le même pour inventer des équations dont la solution est 12345. En voici quelques unes:

— $x + 1 = 12346$;
— $x \times 10 = 123450$;
— $x-11111 = 1234$;
— $x \div 100000 = 0,12345$.

Une fois que vous avez compris le fonctionnement, vous devez être capable d'inventer des équations dont la solution est n'importe quel nombre. Que ce nombre soit petit ou grand, positif ou négatif, avec ou sans chiffres après la virgule, tout ça n'y change rien, le principe reste le même. Retourner au texte.

Contenu masqué n°5

On peut trouver une solution en retournant la question. Que faut-il faire au nombre 4,5 pour retomber sur un nombre entier? le multiplier par 2 par exemple, ou bien par 10. Voici deux réponses possibles:

— $2x = 9$;
— $10x = 45$.

Bravo si vous avez trouvé une de ces deux équations! Mais encore une fois, il y a de nombreuses autres réponses et si vous en avez trouvé une qui marche tout va bien. Retourner au texte.

Contenu masqué n°6

Cette question est très similaire à la précédente. La seule contrainte supplémentaire est d'avoir le terme de droite de l'équation égal à 0, mais ceci ne doit pas vous faire peur si vous avez suivi le chapitre précédent, car vous savez que l'on peut passer les éléments d'une équation d'un côté à l'autre en inversant le signe.

Commençons donc par donner une équation sans division ni nombre à virgule dont la solution est 3,72, par exemple:

$$100x = 372.$$

Il suffit maintenant de soustraire 372 des deux côtés pour obtenir:

$$100x - 372 = 0.$$

Et c'est gagné! Vous voyez, ce n'était pas si difficile que ça. Remarquez que là encore ce n'est pas la seule solution. Par exemple, vous pouvez remarquer que $25 \times 3,72 = 93$, ce qui fait que l'équation suivante marche aussi:

$$25x - 93 = 0.$$

Retourner au texte.

Contenu masqué n°7

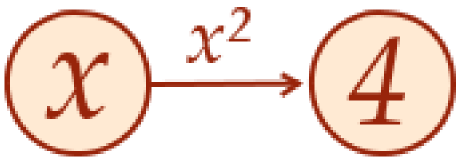
Le fait que -2 et 2 soient opposés nous facilite la tâche. En effet, nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que deux nombres opposés ont le même carré, l'équation que nous cherchons est donc:

$$x^2 = 4.$$

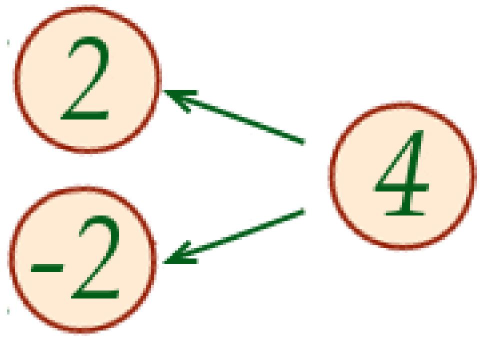
Et si vous voulez tout passer du même côté, on peut également réécrire cette équation de la façon suivante:

$$x^2 - 4 = 0.$$

Pour reprendre les schémas que nous avons utilisés dans le chapitre précédent, cette équation se représente de la façon suivante:



Et son schéma de résolution est le suivant:



Une fois que vous avez compris ceci, le fonctionnement est identique pour -7 et 7. On trouve l'équation suivante:

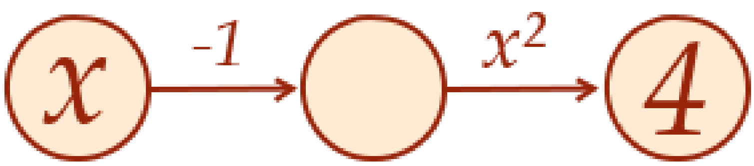
$$x^2 = 49 \text{ ou } x^2 - 49 = 0.$$

Retourner au texte.

Contenu masqué n°8

La question que nous devons nous poser est la suivante: que faut-il faire aux nombres -1 et 3 pour retomber sur -2 et 2? Facile: il suffit de leur soustraire 1. Autrement dit si on commence par soustraire 1 à x pour obtenir $x-1$, il suffit ensuite d'appliquer à cette quantité les transformations de l'équation dont les solutions sont -2 et 2.

En clair, sur un schéma, les étapes s'enchaînent de la façon suivante:



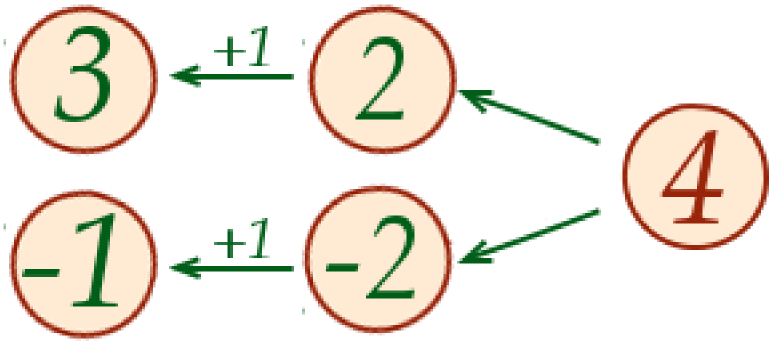
L'équation correspondante est:

$$(x-1)^2 = 4,$$

ou bien

$$(x-1)^2 - 4 = 0$$

si on fait passer le 4 à gauche. Voici alors le schéma de résolution de cette équation:



Vous constatez que tout se passe bien comme nous l'avions prévu: d'abord le carré donne -2 et 2, puis en remontant vers la solution on ajoute 1 ce qui donne bien -1 et 3. Astucieux n'est-ce pas?

Retourner au texte.

Contenu masqué n°9

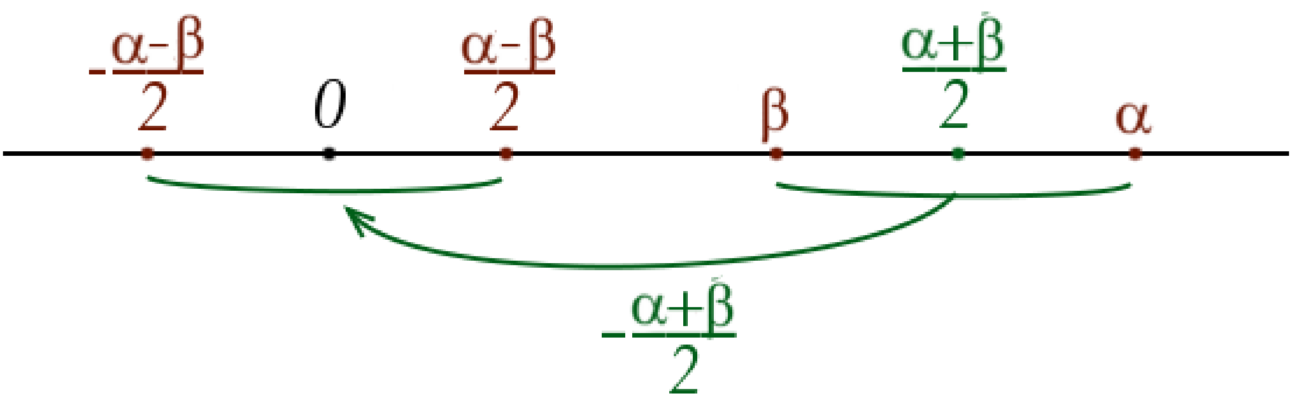
Pour appliquer le même raisonnement que pour la question précédente, il faut commencer par ajouter ou retrancher un nombre à -3 et 11 pour les rendre opposés l'un de l'autre. Avec un peu de réflexion, on se rend compte qu'il faut leur soustraire 4: on obtient alors -7 et 7 qui sont solutions de l'équation $x^2 - 49 = 0$.

Au final, l'équation que nous cherchons est donc:

$$(x-4)^2 - 49 = 0.$$

Essayons maintenant d'expliquer plus généralement la méthode que nous utilisons pour être capables de la reproduire avec n'importe quels nombres. Pour mieux suivre ce qui se passe, appelons ces deux nombres α et β et représentons les sur la droite des nombres réels de la façon suivante:

Il faut alors décaler ces deux nombres d'une certaine quantité de façon à obtenir deux nombres opposés. Le nombre qu'il faut soustraire est le nombre qui se situe juste au milieu de α et β, c'est-à-dire sa moyenne $(\alpha + \beta)/2$.



On voit que les deux nombres que l'on obtient se retrouvent à la distance $(\alpha-\beta)/2$ de chaque côté de 0, ce qui est logique puisque l'écart entre α et β vaut $\alpha-\beta$ et n'a pas changé en retranchant la moyenne.

Les deux nombres obtenus étant opposés, on peut maintenant prendre le carré: ce sont les deux nombres dont le carré est égal à $[(\alpha-\beta)/2]^2$. En d'autres termes, l'équation que nous cherchons est la suivante:

$$\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=0.$$

Vous pouvez remplacez α et β par les nombres que vous voulez, ça marche toujours! Nous venons de trouver une formule donnant une équation ayant pour solution n'importe quelle paire de nombres. Retourner au texte.

Contenu masqué n°10

L'astuce est toute bête: il suffit de multiplier les deux équations:

$$(x^3-2x^2-3x)\times(x^2+2x-35)=0.$$

Si x est égal à -1, 0 ou 3 alors la première des deux équations vaut 0 et donc le produit donne bien 0 aussi. Et si x vaut -7 ou 5, alors c'est la deuxième équation qui vaut 0 et l'équation est également vérifiée.

Ce truc utilise simplement le fait que pour qu'une multiplication soit égale à 0, il faut et il suffit que l'un des termes multipliés soit égal à 0. Retenez bien cette astuce, car ce n'est pas qu'un simple gadget, c'est en réalité un des outils les plus puissants de la théorie des équations! Nous nous en servirons à de nombreuses reprises dans la suite de ce cours. Retourner au texte.

Contenu masqué n°11

Rien de vraiment nouveau dans cette question. Si vous avez bien compris ce que nous avons fait jusque là, il n'y a qu'à combiner les idées pour obtenir le résultat. Les dix petites équations ayant pour solutions les nombres de 1 à 10 sont par exemple:

- $x-1=0$;
- $x-2=0$;
- $x-3=0$;
- $x-4=0$;
- $x-5=0$;
- $x-6=0$;
- $x-7=0$;
- $x-8=0$;
- $x-9=0$;
- $x-10=0$.

Bien entendu, il y a d'autres possibilités que celles-ci, mais ce sont les plus simples. Notez qu'il faut toutefois bien faire passer tous les termes à gauche pour n'avoir plus que 0 à droite et pouvoir appliquer l'astuce de la question précédente.

Il n'y a plus qu'à tout multiplier pour obtenir la solution:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10) = 0.$$

Pour que cette multiplication de dix termes soit égal à 0, il faut que l'une des parenthèse soit égale à 0, autrement dit que l'une des dix petites équations ci-dessus soit vérifiée. Ainsi cette équation a bien dix solutions qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Retourner au texte.

Contenu masqué n°12

Supposons que l'on veuille une équation dont les solutions sont -1, 0 et 3. Grâce au principe de la question précédente, c'est devenu facile, l'équation suivante fait l'affaire:

$$(x-(-1))(x-0)(x-3) = 0.$$

Ce qui donne en simplifiant:

$$(x+1)x(x-3) = 0.$$

Nous avons là affaire à une expression factorisée que nous pouvons développer: tout d'abord $(x+1)x = x^2 + x$, et donc

$$(x+1)x(x-3) = (x^2+x)(x-3) = x^3-3x^2+x^2-3x = x^3-2x^2-3x.$$

Gagné, c'est bien l'équation qui était donnée dans la première question de cette section.

Pour la deuxième, ça marche pareil: l'équation est $(x+7)(x-5)$, ce qui en développant donne

$$(x+7)(x-5) = x^2+7x-5x-35 = x^2+2x-35.$$

Retourner au texte.

Contenu masqué n°13

Considérons deux nombres α et β et étudions les équations qui ont ces deux nombres pour solution. La méthode que nous venons de voir donne l'équation suivante:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0.$$

Pour supprimer les parenthèses, on peut développer cette expression:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

Notre équation peut donc se réécrire de cette façon:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Bien. Retenons cette équation et rappelons-nous maintenant de celle que nous avions trouvée dans la section précédente:

$$\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = 0.$$

Encore une fois, développons pour voir si nous trouvons la même chose. Pour développer les carrés, on utilise l'identité remarquable $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{+}{2}\right)^2 - \left(\frac{-}{2}\right)^2 &= \left(x^2 - 2x\frac{+}{2} + \left(\frac{+}{2}\right)^2\right) - \frac{{}^2 - 2 + {}^2}{4} \\
&= x^2 - x - x + \frac{{}^2 + 2 + {}^2 - {}^2 + 2 - {}^2}{4} \\
&= x^2 - x - x + \frac{4}{4} \\
&= x^2 - (+)x + .
\end{aligned}$$

Ouf! Dans le fond ce n'est pas très compliqué mais il faut bien maîtriser la manipulation des fractions. J'espère que je ne vous ai pas perdu, le plus dur est fait!

Au final, notre équation développée est la suivante:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Alors, que constatez vous? Eh oui, le résultat est le même: une fois développées les deux équations que nous avions ayant pour solution et donnent le même résultat. Les deux équations sont donc bien les mêmes, mais juste présentées de façon différente. Étonnant, non? Retourner au texte.

Deuxième partie

Équations à une inconnue

Introduction

Dans cette partie, on rentre dans le vif du sujet! Nous allons passer en revue les différents types d'équations à une inconnue avec leurs méthodes de résolution.

II.1. Équations du premier degré

Introduction

Les équations du premier degré sont les plus simples que l'on puisse trouver. Ce sont celles dans lesquelles les seules transformations que subit l'inconnue sont les quatre opérations de base: addition, soustraction, multiplication et division. Voici un exemple:

$$3 \times x + 14 = (x - 7) \div 2.$$

Cependant, nous avons déjà vu dans le deuxième chapitre de ce cours qu'avec quelques manipulations de base, toutes ces équations peuvent se réduire à la forme:

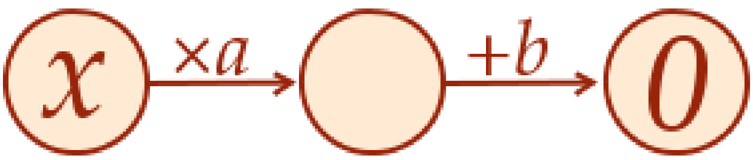
$$ax + b = 0.$$

Par exemple, $-3x + 7 = 0$ est une équation du premier degré. C'est de cette forme de base que nous allons partir dans ce chapitre.

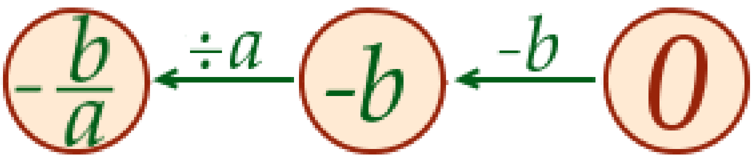
II.1.1. La résolution

Tout de suite une bonne nouvelle: cette section va être courte. En effet, nous savons déjà tout ce qu'il faut savoir pour résoudre les équations du premier degré: l'inconnue x n'apparaît qu'une seule fois dans la forme $ax + b = 0$, il suffit donc de deux petites transformations pour aboutir à la solution:

Le schéma de l'équation est le suivant.



Les deux opérations étant réversibles, le schéma de résolution s'obtient facilement en inversant le chemin:



Nous avons donc la solution de notre équation:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Nous venons de résoudre l'équation sans problème grâce à nos petits schémas, mais remarquez que l'on serait arrivé au même résultat en utilisant uniquement le langage algébrique:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

La première étape consiste à faire passer le b de l'autre côté en le soustrayant et la seconde fait passer le a de l'autre côté en divisant. Ceci permet d'obtenir le x tout seul.

> L'utilisation du symbole d'équivalence, $\Leftrightarrow$, dans la résolution ci-dessus signifie que les équations considérées ont les mêmes solutions. Le fait que la flèche soit à double sens est très important, et vient du fait que l'on utilise des opérations réversibles, comme nous l'avons vu dans la première partie du cours. Si on utilisait des opérations non réversibles comme le carré, alors la flèche n'irait que dans un sens ($\Rightarrow$), ce qui signifie que l'on ne peut pas revenir en arrière et que de nouvelles solutions peuvent être apparues.

Rassurez-vous, nous n'allons pas abandonner tout de suite nos schémas de résolution, mais nous allons commencer une transition en douceur et il va falloir que vous vous habituiez peu à peu à résoudre les équations grâce au langage algébrique. Ça peut sembler un peu abstrait au départ, mais c'est tellement plus pratique une fois qu'on le maîtrise.

II.1.2. Quelques énigmes

Après la théorie, la pratique. Dans cette section, je vous propose quelques énigmes qui se résolvent grâce à des équations du premier degré. Essayez de chercher les réponses par vous-même avant de regarder les solutions!

II.1.2.1. La bosse des équations

> Au zoo, dans l'enclos des chameaux et des dromadaires on peut compter 12 têtes et 17 bosses. Combien y a-t-il de chaque animal?

Pour pouvoir répondre, il est bon de savoir qu'un chameau a deux bosses tandis qu'un dromadaire n'en a qu'une.

Figure II.1.1. – Dromadaire et chameau

Contenu masqué n°14

II.1.2.2. L'épitaphe de Diophante

L'énigme que nous allons voir maintenant est sans doute la plus célèbre de toutes les équations du premier degré de l'histoire des mathématiques. Il s'agit de l'épitaphe (texte gravé sur la tombe) du mathématicien Diophante d'Alexandrie qui a vécu au IIIe siècle. Voici une traduction de ce que l'on pouvait lire sur cette tombe:

> Passant, sous ce tombeau repose Diophante.
> Ces quelques vers tracés par une main savante
> Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
> Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
> Le sixième marqua le temps de son enfance;
> Le douzième fut pris par son adolescence.
> Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
> Puis s'étant marié, sa femme lui donna
> Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
> Reçut de jours hélas! deux fois moins que son père.
> De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
> Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

?

Alors et vous? Êtes-vous capable de dire à quel âge Diophante est mort?

Contenu masqué n°15

II.1.2.3. Quel âge ?

?

Un jeune homme de 21 ans demande son âge à un autre. Ce dernier lui répond: «j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez». Mais quel âge a-t-il?

Le plus dur dans cette énigme, ce n'est pas de résoudre l'équation, c'est de réussir d'abord à trouver l'équation sans s'embrouiller à partir de l'énoncé. 😛 Faites chauffer vos neurones et réfléchissez tranquillement vous pouvez y arriver!

Contenu masqué n°16

II.1.3. Représentation graphique

Lorsque l'on a une équation dont on a passé tous les termes à gauche, il est possible de considérer la fonction associée. Pour les équations du premier degré, ces fonctions sont celles de la forme:

$$f(x) = ax + b.$$

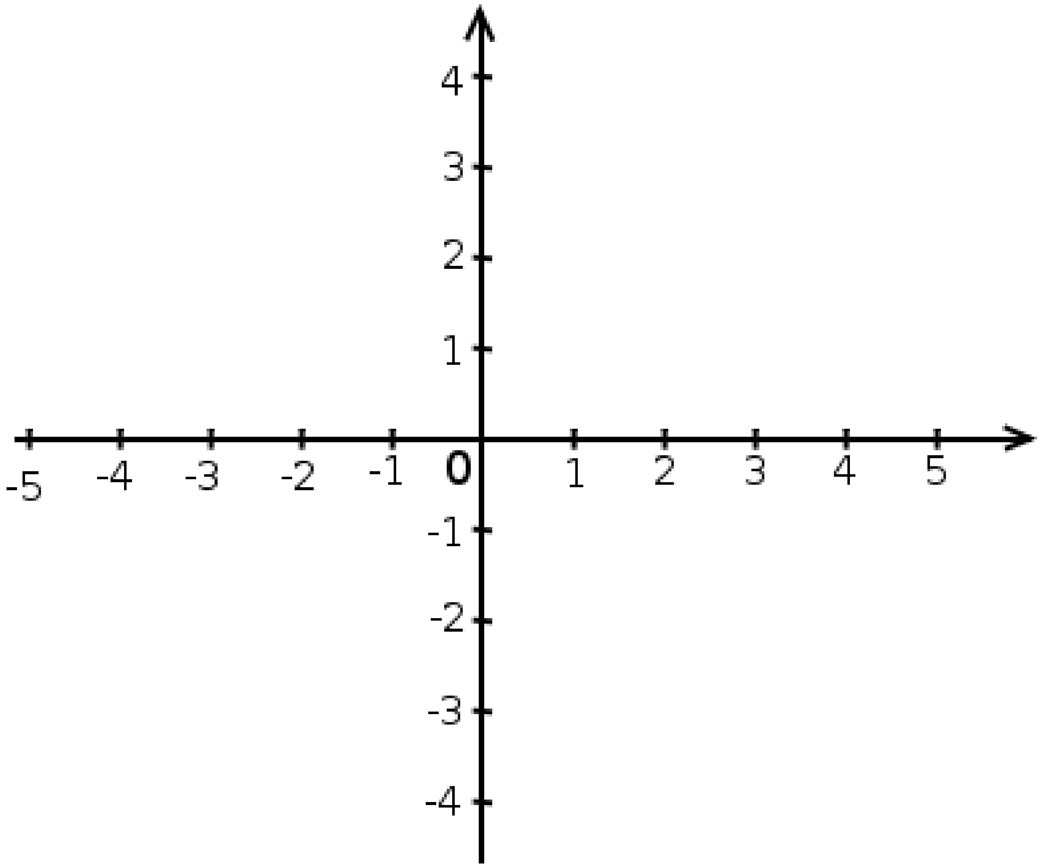
Ces fonctions se nomment des fonctions affines.

i

Pour en savoir plus sur les fonctions, vous pouvez vous reporter au cours Introduction aux fonctions .

Quand on étudie une équation, on ne s'intéresse finalement qu'aux valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est égal à 0. En étudiant la fonction en général, on regarde également ce que donne cette expression pour d'autres valeurs de x. À première vue cela peut sembler superflu, mais en réalité cela permet de prendre du recul et donc de mieux comprendre le fonctionnement de l'équation.

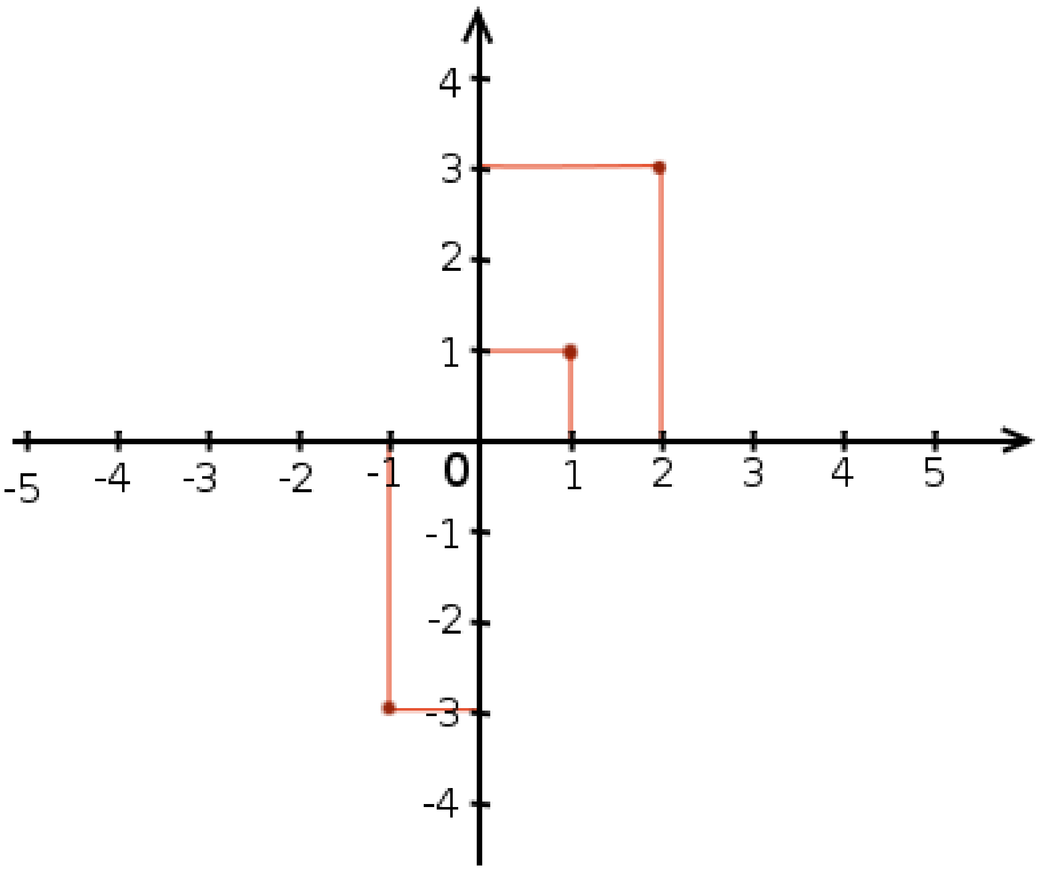
Quand on a une fonction réelle, on peut la représenter dans un repère composé de deux axes: celui des abscisses (horizontal) et celui des ordonnées (vertical):



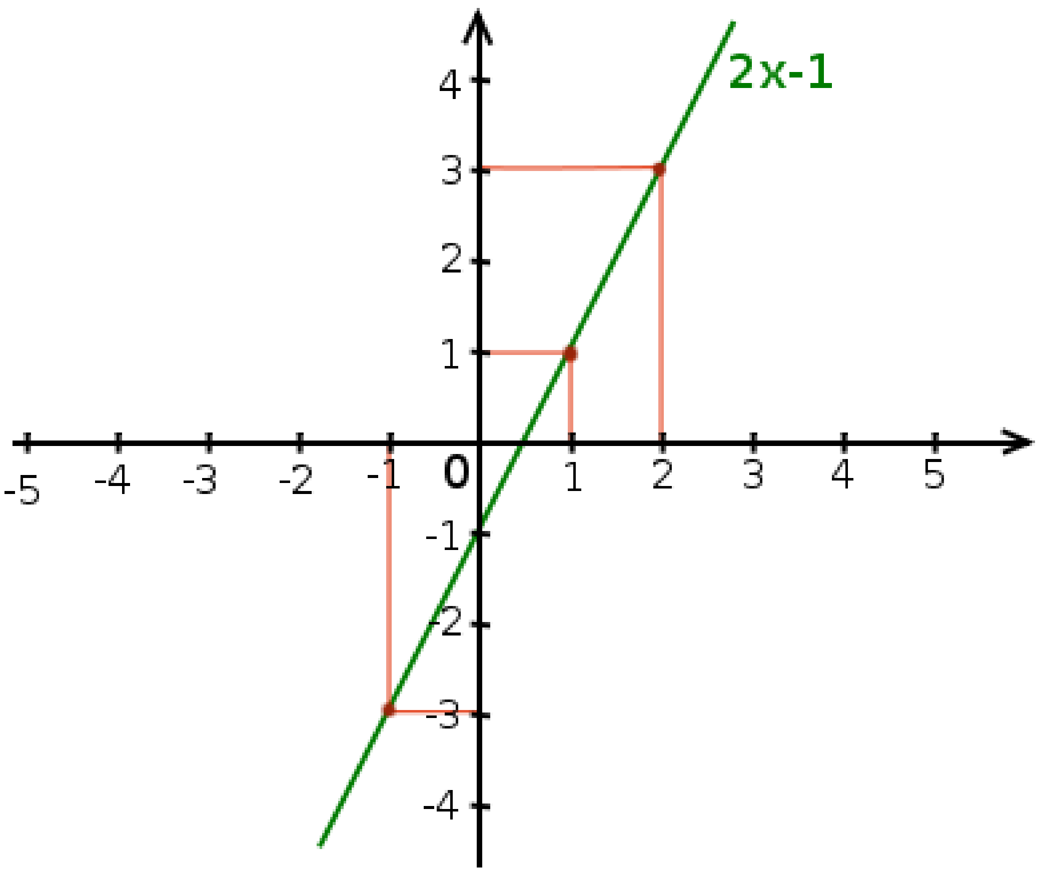
Prenons par exemple la fonction affine $f(x) = 2x{-}1$, alors on place les points de la façon suivante: pour chaque x, on met dans le repère un point ayant pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$. Voici trois exemples:

— si $x = -1$, alors $2x{-}1 = -3$;
— si $x = 1$, alors $2x{-}1 = 1$;
— si $x = 2$, alors $2x{-}1 = 3$.

Cela donne les trois points suivants:



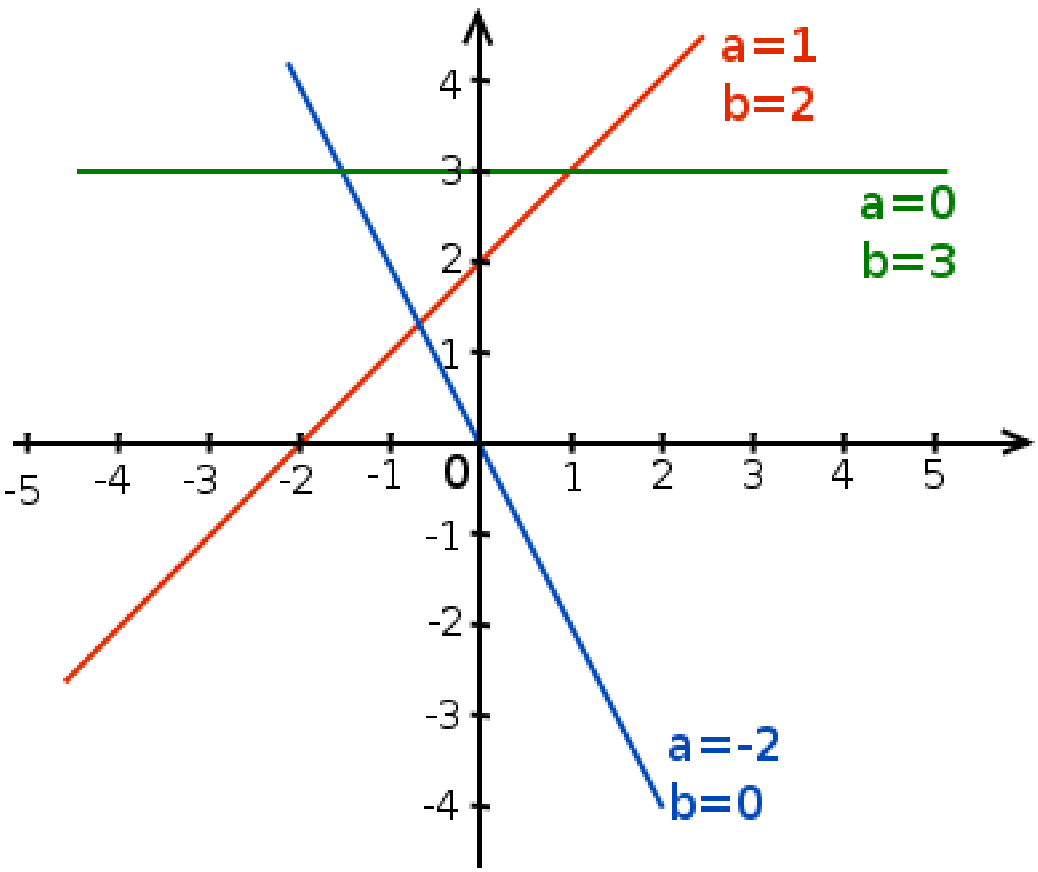
Et si on trace tous les points en faisant varier x, on obtient une droite:



Le fait d'obtenir une droite est tout à fait normal, c'est justement la particularité des fonctions affines. Toutes les fonctions affines se représentent par une droite et les paramètres a et b jouent de la façon suivante:

- Le nombre a s'appelle le coefficient directeur et représente la pente de la droite. Si a est positif, la droite monte de gauche à droite et plus a est grand, plus elle monte vite. Si au contraire a est négatif, la droite descend.
- Le nombre b, s'appelle l'ordonnée à l'origine, c'est la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées.

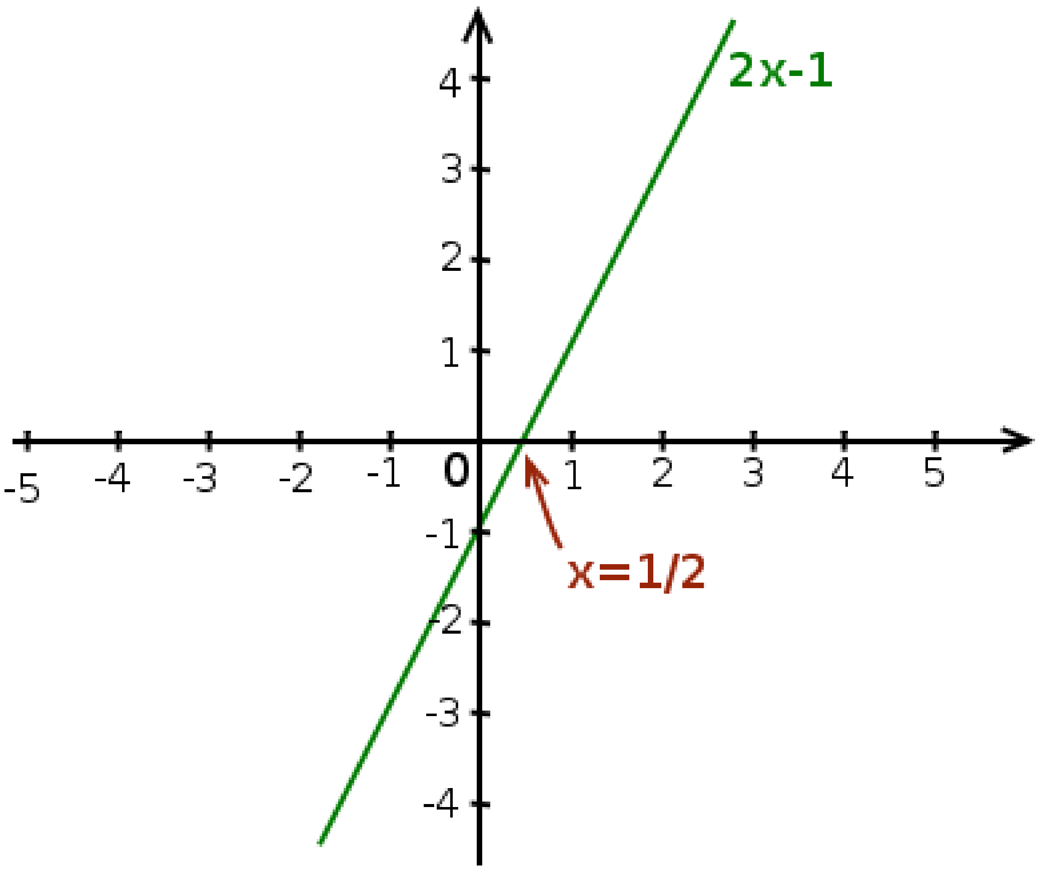
Voici quelques exemples de droites obtenues de cette façon:



> Je ne vous en dis pas plus sur les représentations des fonctions car ce n'est pas l'objet de ce cours. Si vous voulez comprendre plus en détail pourquoi on obtient des droites et ce qui se passe quand a et b varient, vous pouvez vous reporter à un cours sur les fonctions.

Les solutions de l'équation correspondent alors aux points où la fonction vaut 0, c'est-à-dire aux intersections avec l'axe des abscisses.

Vu que les fonctions affines sont des droites, elles coupent l'axe des abscisses en un seul point qui correspond à la solution que nous avions trouvée. Voici sa représentation pour l'équation $2x - 1 = 0$ pour laquelle on trouve bien $x = 1/2$.



Il existe une exception pour laquelle, la droite ne coupe pas l'axe des abscisses: si elle est parallèle à celui-ci. Cela signifie que $a = 0$, donc que l'inconnue disparaît dans notre équation qui devient simplement $b = 0$. Une équation sans inconnue! Voilà qui est très étrange. Il y a alors deux cas:

— si b n'est pas égal à 0, l'égalité est toujours fausse et donc l'équation n'a aucune solution;
— si b est égal à 0, l'équation devient juste 0=0 qui est toujours vrai, donc tous les nombres sont solutions. Dans ce cas, notre droite est confondue avec l'axe des abscisses.

Contenu masqué

Contenu masqué n°14

La première chose à faire quand on se retrouve face à une énigme comme celle-ci, c'est la traduire dans notre merveilleux langage algébrique. Et pour cela, il faut commencer par décider ce que représente l'inconnue. Ici, nous cherchons deux choses: le nombre de chameaux et le nombre de dromadaires, l'inconnue peut donc être l'un au l'autre de ces nombres.

Décidons par exemple de noter x le nombre de chameaux. Comme il y a 12 têtes cela signifie qu'il y a 12 animaux, il y a donc $12-x$ dromadaires. À partir de là, nous pouvons compter les bosses:

— il y a x chameaux à deux bosses, ce qui fait $2x$ bosses;
— il y a $12-x$ dromadaires à une bosse, ce qui fait $12-x$ bosses.

Au total, il y a donc $2x + (12-x)$ bosses. Or on sait que ce nombre vaut 17, ce qui donne l'équation suivante:

$$2x + (12-x) = 17.$$

Et voilà! Il n'y a maintenant plus qu'à appliquer ce que nous avons appris à faire pour résoudre cette équation.

$$\begin{aligned} 2x + (12-x) = 17 &\Leftrightarrow 2x + 12-x = 17 \\ &\Leftrightarrow 2x-x = 17 - 12 \\ &\Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Il y a donc 5 chameaux et 7 dromadaires.

Notez que l'exemple est si simple que nous n'avons même pas pris la peine de passer par la forme standard $ax + b = 0$. Si on avait voulu le faire, on aurait obtenu $x-5 = 0$ et donc $a = 1$ et $b = -5$, ce qui donne bien $x = -b/a = 5/1 = 5$. Retourner au texte.

Contenu masqué n°15

Clairement l'inconnue de ce problème est l'âge de Diophante, notons-le donc x. L'épitaphe découpe la vie de Diophante en plusieurs tranches:

— son enfance qui dure un sixième de sa vie soit $\frac{1}{6}x$;
— son adolescence qui dure un douzième de sa vie soit $\frac{1}{12}x$;
— entre son adolescence et son mariage il s'écoule un septième de sa vie soit $\frac{1}{7}x$;
— entre son mariage et la naissance de son fils il s'écoule 5 ans;
— son fils a vécu deux fois moins longtemps que lui soit $frac12x$;
— après la mort de son fils il s'écoule encore 4 ans.

La durée de sa vie est égale à la somme de tous ces termes, on obtient donc l'équation suivante:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x.$$

Il n'y a maintenant plus qu'à résoudre:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x &\Leftrightarrow \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4-x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}-1\right) x + 5 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{14}{84} + \frac{7}{84} + \frac{12}{84} + \frac{42}{84}-\frac{84}{84}\right) x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{9}{84}x + 9 = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc $a = -9/84$ et $b = 9$. Il suffit maintenant simplement soit de passer ces deux termes de l'autre côté, soit d'appliquer directement la formule que nous avons vue dans la section précédente si vous vous en souvenez:

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{-\frac{9}{84}} = 9 \times \frac{84}{9} = 84.$$

Diophante est donc mort à l'âge de 84 ans, un bel âge pour l'époque! Retourner au texte.

Contenu masqué n°16

Commençons par dire que notre inconnue x désigne cette fois l'âge de l'homme. Ainsi cet homme a $x-21$ années de plus que le jeune homme de 21 ans. L'expression «quand j'avais l'âge que vous avez» peut donc être remplacée par «il y a $x-21$ ans». L'homme a donc dit:

«J'ai deux fois l'âge que vous aviez il y a $x-21$ ans»

Or le jeune homme a 21, donc, il y a $x-21$ ans, il avait $21-(x-21)$ ans. L'homme prétend donc avoir deux fois cet âge, ce qui revient à l'équation suivante:

$$x = 2 \times (21-(x-21)).$$

Le plus dur est fait! Il n'y a plus qu'à résoudre:

$$\begin{aligned} x = 2 \times (21-(x-21)) &\Leftrightarrow x = 2 \times (21-x+21) \\ &\Leftrightarrow x = 2 \times (42-x) \\ &\Leftrightarrow x = 84-2x \\ &\Leftrightarrow 3x = 84 \\ &\Leftrightarrow x = 84 \div 3 = 28. \end{aligned}$$

L'homme a donc vingt-huit ans! Retourner au texte.

II.2. Équations du second degré

Introduction

Si les équations du premier degré sont assez simples à résoudre, c'est une autre histoire avec les équations du second degré. Rappelez-vous, il s'agit des équations faisant intervenir les quatre opérations de base et des carrés dont nous avons vu dans la première partie de ce cours qu'elles peuvent se réduire à l'expression suivante:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ce qui nous embête dans ces équations, c'est que l'inconnue x est présente deux fois. Impossible donc de l'isoler simplement comme nous le faisions jusque ici. Il va donc nous falloir faire preuve d'ingéniosité.

II.2.1. La forme canonique

La forme standard sous laquelle on trouve la plupart du temps une équation du second degré est la suivante:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

C'est ce que l'on appelle la forme développée de l'équation. Ce nom vient du fait que tout est développé: il n'y a pas de parenthèses ou de facteurs à distribuer dans cette expression. La forme développée est notre point de départ. Le but du jeu est maintenant de tourner et retourner cette équation dans tous les sens pour en faire sortir ses solutions. Tous les coups sont permis!

La première simplification que l'on fait la plupart du temps, c'est une division par le nombre a.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}.$$

Ce qui après simplification donne ceci:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

> **!** Notez que le nombre a est différent de 0 sinon nous n'aurions pas de x^2 et l'équation serait simplement du premier degré. Nous avons donc bien le droit de diviser.

Pour prendre un exemple concret, l'équation $2x^2 + 8x - 6 = 0$ devient $x^2 + 4x - 3 = 0$ après avoir diviser par 2. Cette opération permet de n'avoir plus que deux paramètres à contrôler dans l'équation: à la place des trois nombres a, b et c, nous n'avons plus que b/a et c/a.

Bon, cette division par a était un tour de chauffe. Notre équation est un peu simplifiée, mais le plus gros problème demeure: il y a toujours deux occurrences de l'inconnue x.

II.2.1.1. Les identités remarquables à la rescousse

Pour faire disparaître l'un des x de notre équation, nous allons user d'une arme redoutable: les identités remarquables. Ce nom vous dit-il quelque chose? Les identités remarquables sont les égalités suivantes qui sont vraies pour n'importe quelle paire de nombres u et v:

— $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$;
— $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$;
— $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$.

Ce qui va nous intéresser dans les identités remarquables, c'est leur capacité à faire apparaître et disparaître des termes. Regarder la première par exemple: dans le terme de gauche, le u n'apparaît qu'une fois tandis que dans le terme de droite il s'y trouve deux fois. Mieux: il se trouve une fois au carré et une fois avec une simple multiplication par $2v$. Si l'on remplace u par x dans cette première identité on obtient:

$$(x + v)^2 = x^2 + 2vx + v^2.$$

Vous ne trouvez pas que le terme de droite ressemble étrangement à notre équation du second degré?

Pour qu'elle lui ressemble encore plus, il faudrait que les coefficients de x soient égaux, autrement dit, il faudrait que $2v$ soit égal à b/a. Rien de plus simple, il suffit de choisir v égal à $b/2a$, notre identité remarquable devient alors:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

On brûle! Cette fois, on sent que nous sommes tout proches, pourtant le dernier terme nous embête. Dans notre équation, on a c/a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

tandis que l'identité remarquable nous donne $b^2/4a^2$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Attention, ce n'est pas le moment de nous emmêler les pinceaux entre notre équation et notre identité remarquable. Il faut bien faire la différence. Une identité remarquable est une égalité qui est toujours vraie, les lettres a, b, c et x peuvent être n'importe quels nombre l'égalité sera juste. Pour l'équation en revanche, tous les x ne marchent pas: le but du jeu est précisément de trouver les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie.

Alors que fait-on de notre identité et de notre équation? C'est le moment d'avoir une autre idée astucieuse. 😊 Eh bien puisque nous avons besoin d'avoir le terme $b^2/4a^2$ pour pouvoir utiliser notre identité, nous allons l'ajouter à notre équation. Seulement comme il faut que l'équation reste la même, nous allons aussi le soustraire pour compenser. En clair, on fait ça:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+ca=0.$$

Et voilà le travail, nous pouvons maintenant utiliser l'identité remarquable avec les trois premiers termes de l'équation et on obtient:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+ca=0.$$

Et c'est gagné! Enfin quand je dis que c'est gagné, bien sûr nous n'avons pas encore les solutions, mais à partir de maintenant, nous savons faire: il n'y a plus qu'un x. Or quand il n'y a plus qu'un x, il suffit comme nous l'avons appris dans la première partie du cours de revenir en arrière pour isoler peu à peu notre inconnue. Bref, nous n'avons pas encore fini, mais nous savons d'ores et déjà que nous allons y arriver! 😋

II.2.1.2. La fin de la résolution

Pour simplifier commençons par réduire au même dénominateur les deux derniers termes pour les ajouter:

$$-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

L'équation devient alors:

$$\boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.}$$

Oui, je l'encadre! Mesdames, messieurs, je vous présente **la forme canonique** de notre équation du second degré. D'une manière générale, la forme canonique d'une équation du second degré est une écriture de du type

$$(x + \text{truc})^2 - \text{machin} = 0.$$

Et si vous avez bonne mémoire, vous devez vous souvenir que c'est exactement ce genre d'équation que nous avions trouvées lorsque nous cherchions des équations ayant deux solutions dans le chapitre Inventons des équations.

Nous verrons à la fin de ce chapitre que la forme canonique peut nous révéler beaucoup de choses sur l'équation et en particulier sur sa représentation graphique. Mais pour l'instant notre but est de trouver les solutions, donc nous n'avons pas une minute à perdre, isolons notre x.

Pour cela, commençons par passer le terme constant à droite:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Il est maintenant temps de prendre la racine carrée. Oui mais voilà, pour prendre la racine carrée, il faut un nombre positif, or à bien y regarder, rien ne nous indique que le terme de droite soit positif: le dénominateur $4a^2$ est bien positif, mais le numérateur $b^2 - 4ac$ peut avoir n'importe quel signe.

L'équation va donner un résultat différent selon le signe de $b^2 - 4ac$. Cette quantité joue donc un rôle important dans la résolution de l'équation au point qu'on lui a donné un nom: le discriminant. On le note Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

L'équation se réécrit alors de la façon suivante:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Nous devons maintenant distinguer les cas selon le signe du discriminant:

- si $\Delta < 0$, alors le terme de gauche est positif et celui de droite strictement négatif. Ils ne pourront donc jamais être égaux et l'équation n'a pas de solution.
- si $\Delta \geq 0$, alors on peut prendre la racine carrée et poursuivre notre résolution.

Continuons donc dans le cas où $\Delta \geq 0$. En remontant le carré, on fait apparaître deux solutions opposées:

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Et en faisant passer le $b/2a$ de l'autre côté, on obtient les deux solutions suivantes:

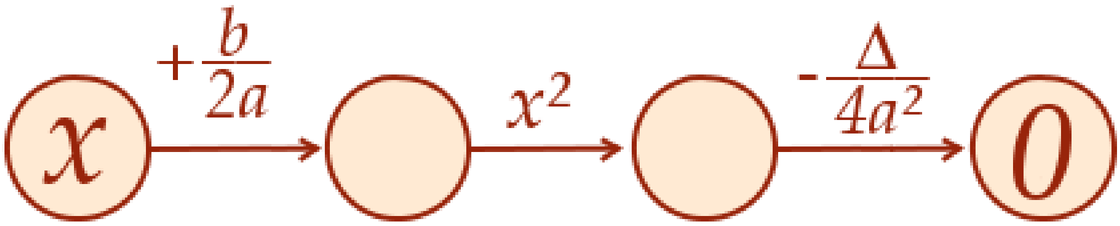
$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Et voilà le travail! Notre équation est résolue. Notez qu'à cette dernière étape j'ai mis deux petits indices à notre inconnue pour pouvoir distinguer les deux solutions: x_1 et x_2.

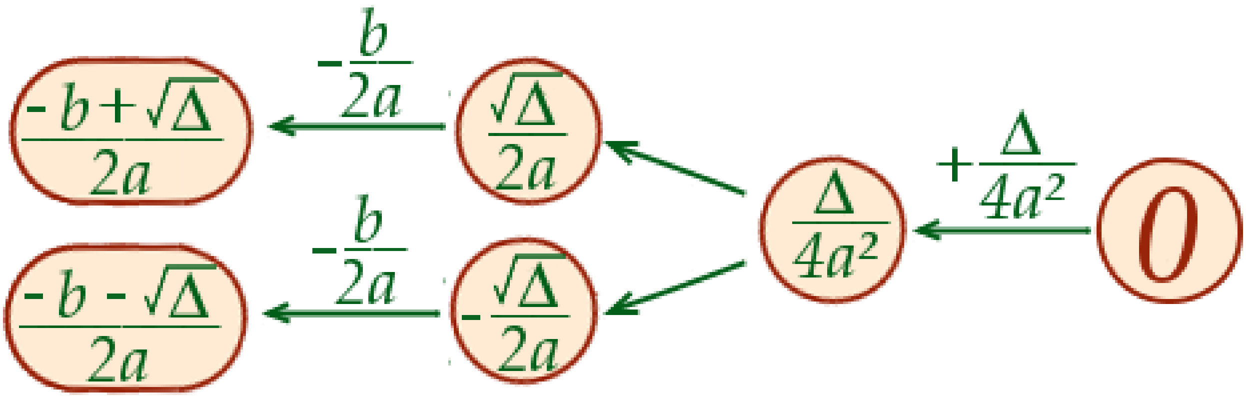
Il faut également remarquer un cas particulier: si $\Delta = 0$, alors les deux solutions que nous venons de trouver sont égales. Il n'y a donc réellement qu'une seule solution.

II.2.1.3. Avec des schémas

Si vous avez encore un peu de mal avec les résolutions algébriques, voici en cadeau le schéma de l'équation en partant de la forme canonique:



Ce schéma se résout de la façon suivante, qui correspond étape par étape à tout ce que nous avons fait ci-dessus.



Comparez ce dessin à la méthode algébrique: vous verrez que c'est exactement le même raisonnement, mais juste présenté différemment.

II.2.1.4. Récapitulons

Ouf! Nous venons de faire le plus gros du travail sur les équations du second degré. Cette section était assez longue et mérite un petit tableau récapitulatif.

Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et on a alors trois cas possibles:

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Pas de solutions	Une solution	Deux solutions
	$x = -\frac{b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

II.2.2. La forme factorisée

Nous avons vu que la forme canonique d'une équation du second degré permet de la résoudre sans problème quand c'est possible. Il existe cependant une deuxième forme également bien utile et qui offre un point de vue différent sur l'équation: **la forme factorisée**.

Pour la trouver, il nous faut repartir de la forme canonique:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Cette fois, c'est l'identité remarquable $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ que nous allons utiliser. En effet, dans le cas où le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, le dernier terme de l'équation peut se réécrire sous la forme d'un carré:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0.$$

Nous pouvons alors appliquer notre identité pour trouver ceci:

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Soit après réduction au même dénominateur

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

C'est cette forme que l'on nomme la **forme factorisée**. À première vue, elle peut sembler moins pratique que la forme canonique: après nous être donnés tant de mal à faire en sorte que l'inconnue x n'apparaissent qu'une seule fois, voilà qu'on en fait réapparaître une deuxième!

Mais à bien y regarder, cette forme nous permet d'utiliser une règle que nous avons déjà vue dans le chapitre Inventons des équations:

> Quand un produit de deux termes est égal à 0, alors, c'est que l'un des deux est égal à 0.

Or là, nous avons écrit notre équation du second degré comme le produit de deux équations du premier degré! C'est donc que l'une des deux est vérifiée:

$$\begin{cases} x+\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & =0 \\ ou & \\ x+\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & =0. \end{cases}$$

Et les équations du premier degré, pas de problème, on sait faire! On obtient bien les mêmes solutions que nous avons trouvées dans la section précédente.

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ ou \\ x_2 = -\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases}$$

> Pour les équations du second degré, la forme canonique et la forme factorisée sont aussi utiles l'une que l'autre, car elles permettent toutes deux de retrouver les solutions. Mais d'un point de vue plus général, la forme factorisée est plus puissante. À partir du degré 3, il n'est plus possible de transformer l'équation de façon à ce que l'inconnue n'apparaisse qu'une seule fois. En revanche, pour tous les degrés, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, il existe une factorisation de l'équation en petites équations de degré inférieur.

II.2.3. Quelques énigmes

Il est temps de passer à la pratique: voici quelques énigmes qui se résolvent grâce à des équations du second degré. Essayez de chercher les réponses par vous-même avant de regarder les solutions!

II.2.3.1. Retour à Babylone

Vous souvenez-vous, dans le premier chapitre de ce cours, nous avions vu que les babyloniens étudiaient aussi les équations du second degré et nous avions donné l'exemple suivant présent sur la célèbre tablette BM13901 :

> J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 0,75.

Dans notre langage algébrique, l'équation posée est la suivante:

$$x^2 + x = 0,75.$$

Maintenant à vous de la résoudre!

Contenu masqué n°17

II.2.3.2. Le nombre d'or

?

Le nombre d'or est un nombre positif noté φ dont le carré est égal à lui-même plus 1. Mais combien vaut-il?

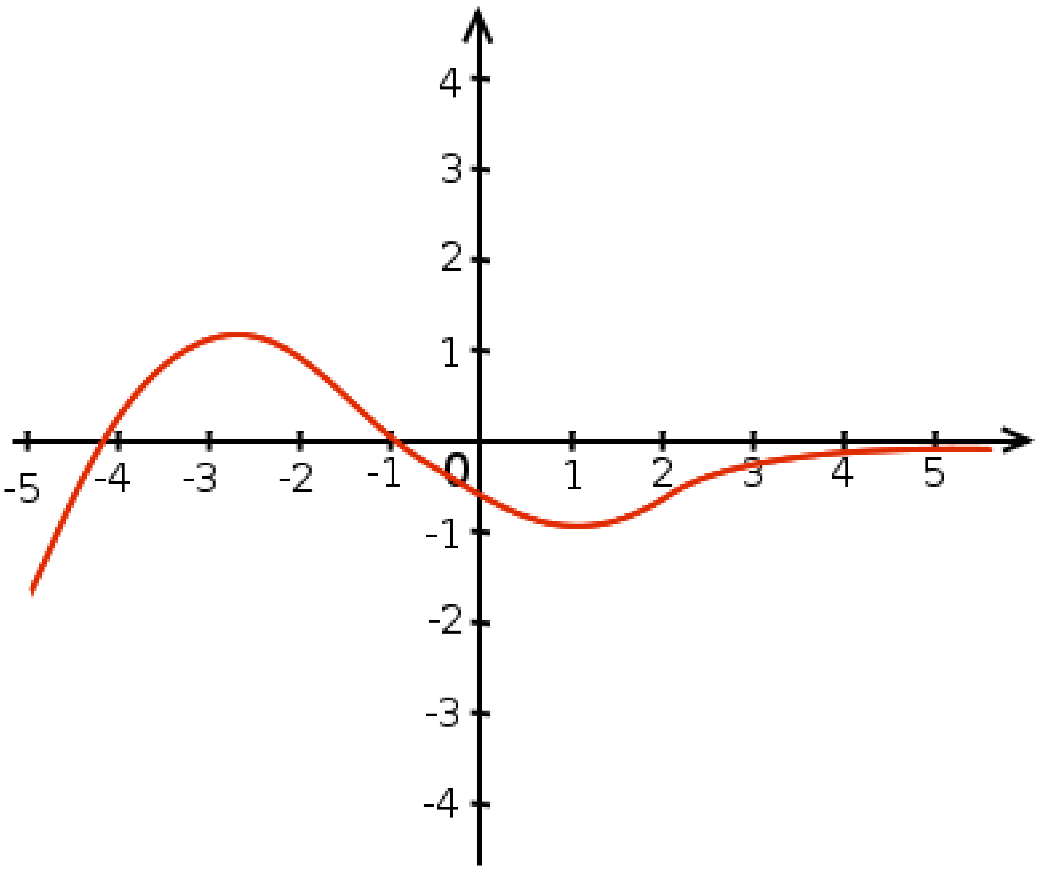
Le nombre d'or est un nombre très important en mathématiques qui intervient dans de nombreux contextes différents. C'est par exemple le rapport de la diagonale et du côté d'un pentagone régulier. C'est aussi le nombre vers lequel tend le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Contenu masqué n°18

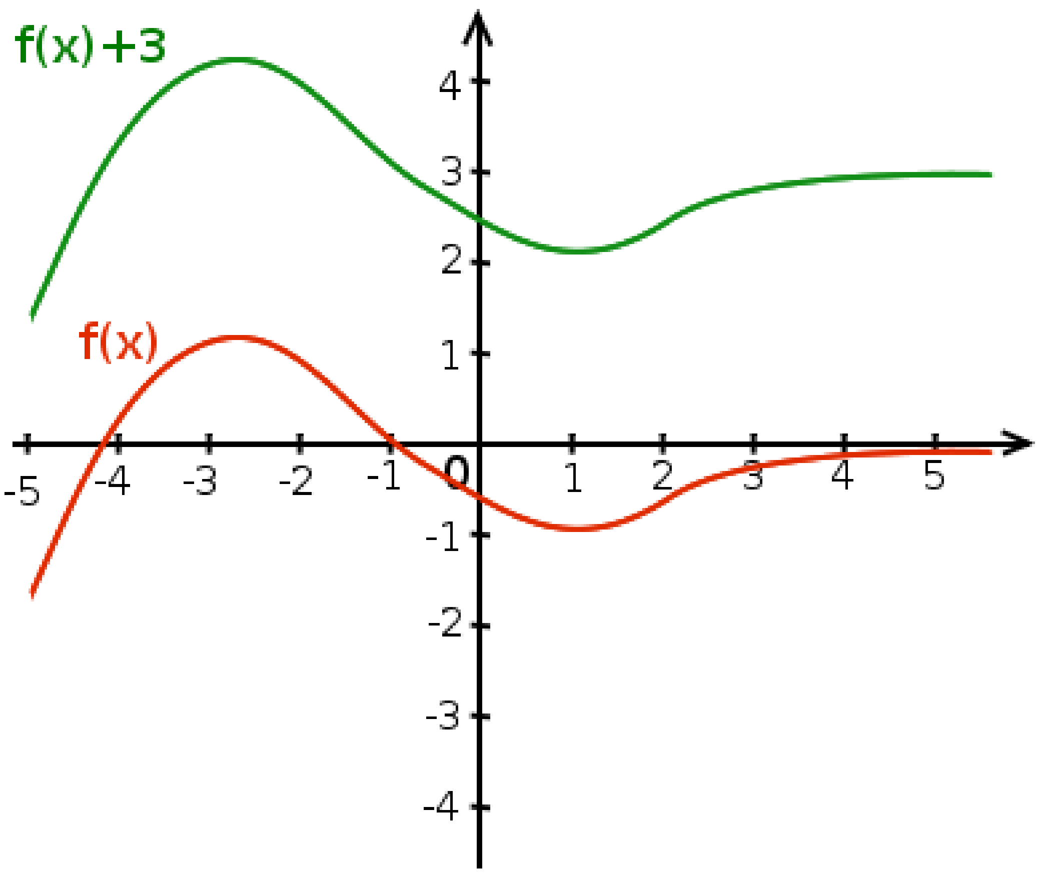
II.2.4. Représentation graphique

II.2.4.1. Déplacer une courbe

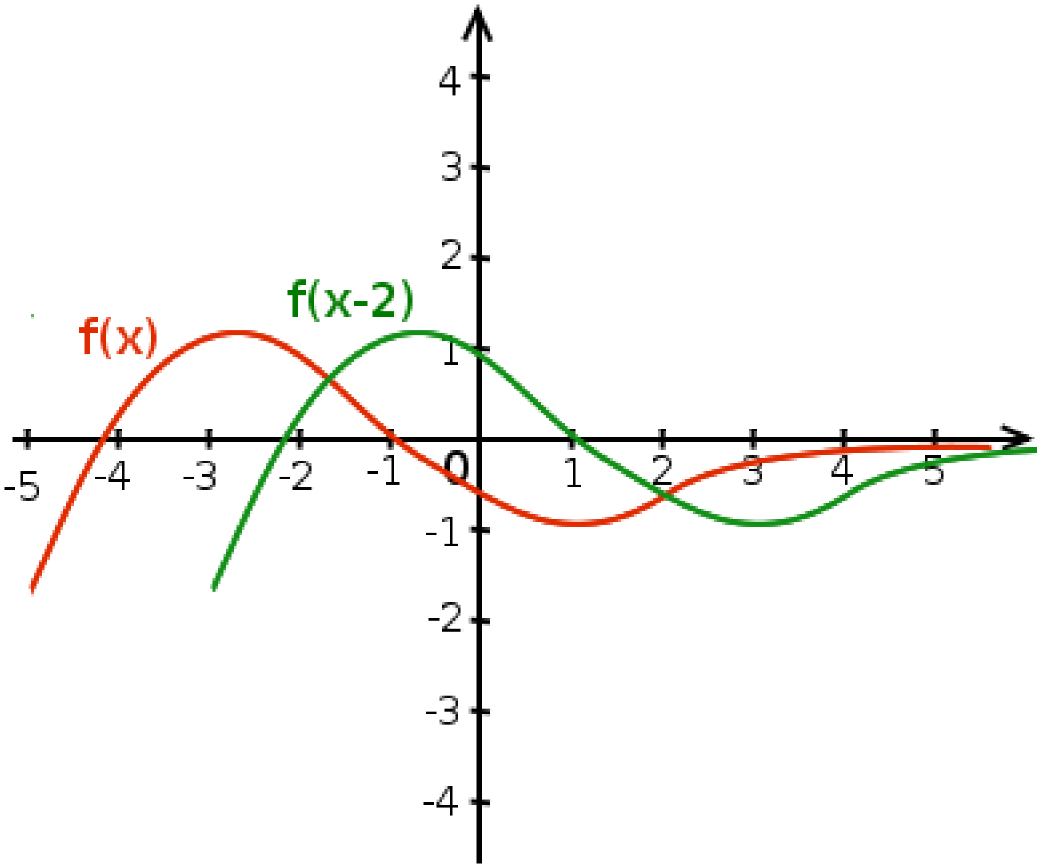
Avant d'attaquer la représentation des équations du second degré, commençons par une propriété générale de la représentation des fonctions. Supposons que l'on ait une fonction $f(x)$ dont le graphe est le suivant:



Alors, si on ajoute ou soustrait une constante à $f(x)$, cela revient à translater son graphe verticalement. Voici par exemple, le graphe de $x \mapsto f(x)+3$:



Si en revanche, on ajoute ou soustrait une constante à x avant de lui appliquer f, alors on translate le graphe horizontalement. Voici le graphe de $x \mapsto f(x-2)$:

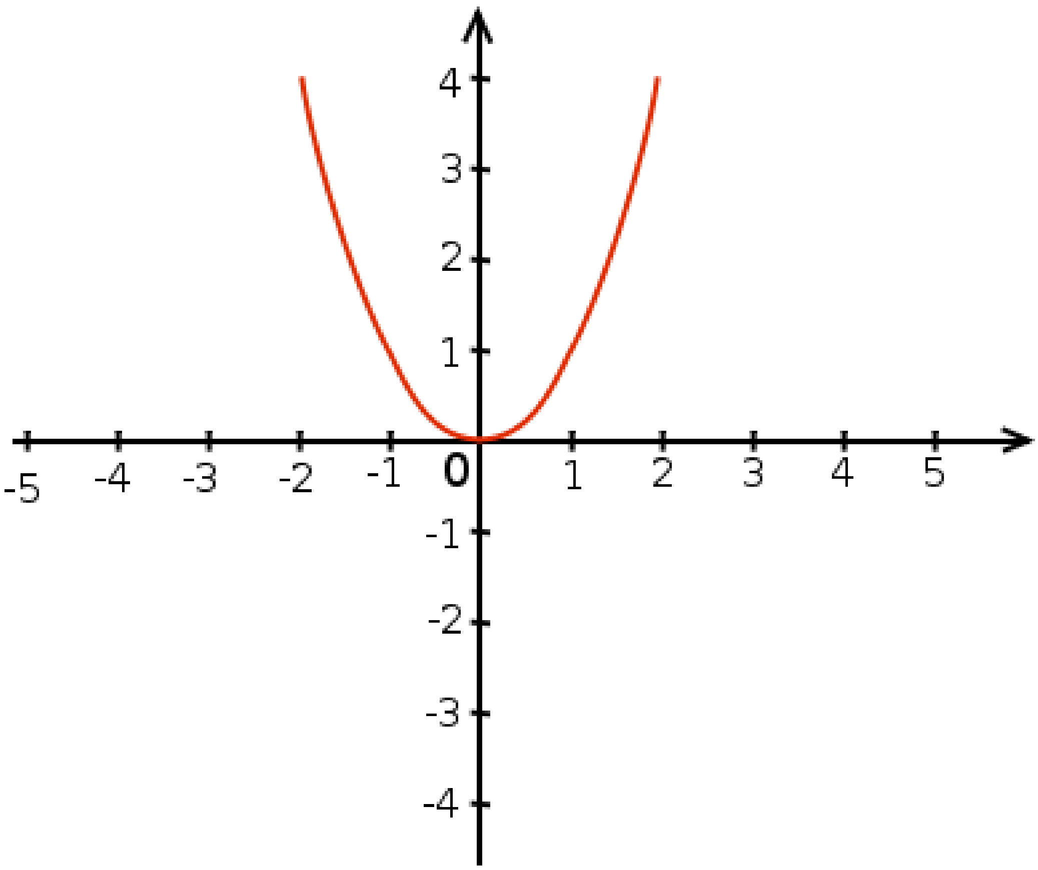


Évidemment, il est possible de combiner les deux effets: la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x-\text{truc}) + \text{machin}$ correspond à celle de f, mais décalée de truc vers la droite et de machin vers le haut.

Maintenant que nous savons ça, nous allons pouvoir l'appliquer aux fonctions du second degré.

II.2.4.2. La parabole

La fonction $f(x) = x^2$ a le graphe suivant:



Cette figure se nomme une **parabole**. Et si l'on veut translater cette parabole horizontalement et verticalement, il faut regarder les fonctions de la forme:

$$x \mapsto (x - \text{truc})^2 + \text{machin}.$$

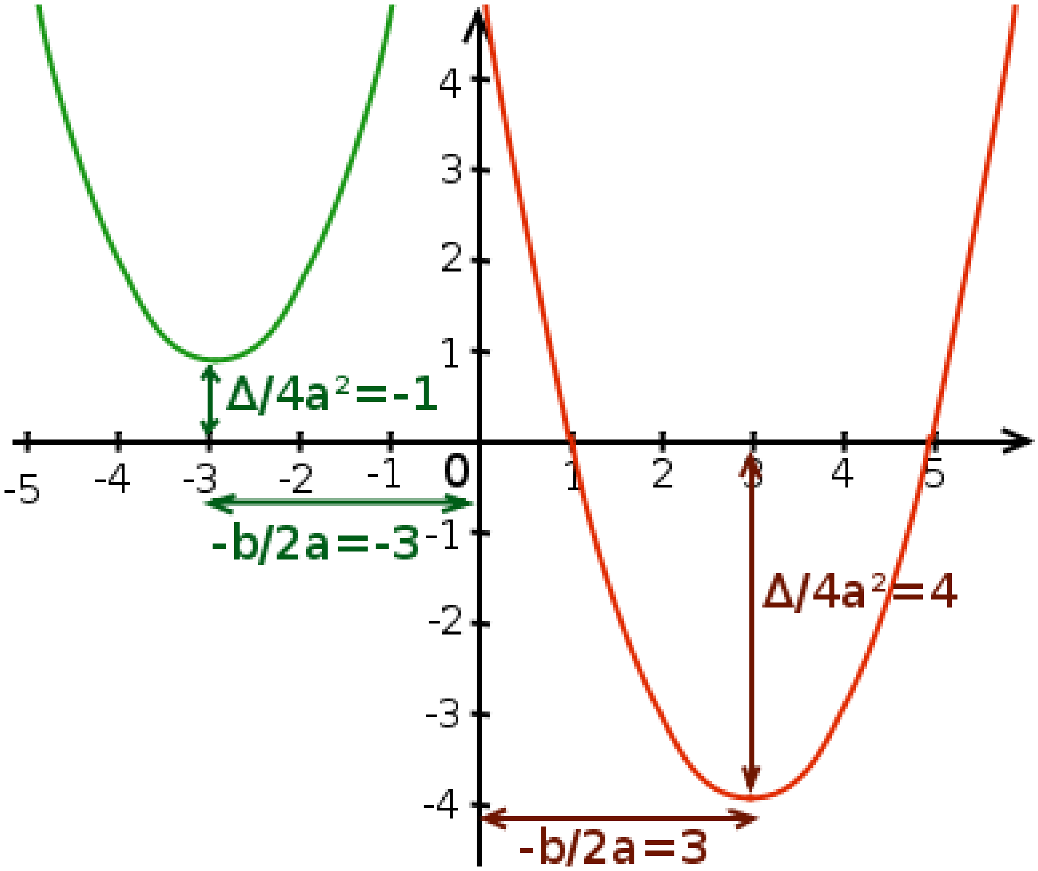
?

Mais dites-moi, ça ne vous rappelle rien ça?

Mais si bien sûr: *la forme canonique*! Nous avons vu au début de ce chapitre que la forme canonique d'une équation du second degré s'écrit de la façon suivante:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Sa représentation graphique correspond donc à celle de la parabole $f(x) = x^2$ mais décalée de $b/2a$ vers la gauche et de $\Delta/4a^2$ vers le bas. Voici deux exemples:



On retrouve donc bien les résultats obtenus algébriquement au début du chapitre:

— Si $\Delta < 0$, la parabole est décalée vers le haut. Elle ne croise donc pas l'axe des abscisses et il n'y a pas de solution.
— Si $\Delta = 0$, la parabole reste au même niveau. Il y a donc une seule solution.
— Si $\Delta > 0$, la parabole est décalée vers le bas. Elle croise donc l'axe des abscisses en deux points et il y a deux solutions. Plus $\Delta/4a^2$ est grand, plus la parabole est enfoncée vers le bas et plus les deux solutions sont éloignées l'une de l'autre.

Le décalage de $b/2a$ donne lui la position horizontale de la parabole: la pointe de la parabole se trouve à l'abscisse $-b/2a$. Vu que la parabole est symétrique, cela signifie que $-b/2a$ se trouve juste au milieu des deux solutions: c'est leur moyenne.

Contenu masqué

Contenu masqué n°17

Commençons par passer tous les termes à gauche pour obtenir:

$$x^2 + x - 0,75 = 0.$$

On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -0,75$ on peut par conséquent calculer le discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0,75) = 1 + 4 \times 0,75 = 1 + 3 = 4.$$

Ce nombre est positif, il y a donc deux solutions:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{4}}{2\times 1} = \dfrac{-1-2}{2} = \dfrac{-3}{2} = -1,5 \\ ou \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{4}}{2\times 1} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2} = 0,5. \end{cases}$$

Les deux solutions sont donc -1,5 et 0,5. Rappelez-vous que dans la tablette BM13901, les babyloniens qui ne connaissaient pas les nombres négatifs n'avaient trouvé que 0,5. Nous sommes donc plus malins que les babyloniens.

Retourner au texte.

Contenu masqué n°18

L'équation du nombre d'or est la suivante:

$$x^2 = x + 1.$$

Ou en passant tout du même côté:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On a donc $a = 1$ et $b = c = -1$, ce qui donne $\Delta = 5$. Ainsi, les deux solutions sont:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618... \\ ou \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618... \end{cases}$$

Le nombre d'or est un nombre positif, c'est donc la deuxième solution:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$$

Retourner au texte.

II.3. Équations de degré supérieur

Introduction

Nous avons vu les équations de degré 1 et 2, il est tout naturel de vouloir continuer sur cette voie avec celles de degré 3, 4, 5, 6… en rajoutant progressivement des termes contenant x^3, x^4, x^5, x^6 et ainsi de suite. Dans ce chapitre nous allons voir comment les mathématiciens s'y sont pris pour attaquer ces équations et ce qu'ils ont trouvé.

> L'étude de ces équations de degré supérieur est très technique et au dessus du niveau de ce cours, c'est pourquoi dans ce chapitre vos cellules grises vont pouvoir se reposer. Je vais simplement vous raconter l'histoire mouvementée de ces équations mais nous n'entrerons pas dans le détail de leur résolution.

II.3.1. Une polémique en Italie

II.3.1.1. Les équations du troisième degré

Après la résolution des équations du second degré par Al-Khawarizmi au IXe siècle, les mathématiciens se sont attaqué, d'abord sans succès aux équations du troisième degré, c'est-à-dire celles de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Après plusieurs siècles d'essais sans résultats, les mathématiciens finirent par penser qu'il était impossible de résoudre ces équations de façon algébrique. C'est notamment la thèse avancée par le mathématicien italien Luca Pacioli dans son ouvrage de 1494, *Summa de arithmetica, geometria, de proportioni et de proportionalita* considéré à l'époque comme une référence.

Figure II.3.1. – Luca Pacioli avec un élève

Jusqu'au jour où, en 1535, deux mathématiciens italiens, Antonio Maria Fior et Niccolo Tartaglia se lancèrent un défi. Les mathématiciens ont toujours aimé se lancer des défis et cette fois-ci la règle était la suivante: chacun des deux adversaires posait trente problèmes à son concurrent à résoudre avant une date donné. Le vainqueur, c'est-à-dire celui qui résoudrait le plus de problèmes se verrait alors offrir trente banquets par le vaincu!

Fior proposa à Tartaglia trente problèmes basés sur des équations du troisième degré, pensant que son adversaire ne parviendrait jamais à les résoudre. Mais c'était sans compter sur la persévérance de ce dernier qui, quelques jours seulement avant la fin du délai, parvint à trouver la règle que tout le monde cherchait depuis plusieurs siècles et résolut ses trente problèmes.

La nouvelle fit grand bruit, seulement voilà, dans les semaines qui suivirent, Tartaglia refusa de divulguer la règle qu'il avait trouvée, préférant la garder pour lui!

Ce secret n'était pas du tout de goût d'un autre mathématicien italien dénommé Girolamo Cardano (parfois francisé en Jérôme Cardan) qui usa de toutes les ruses pour essayer de faire parler Tartaglia. Il finit par y parvenir lors d'une entrevue à Milan en 1539 au cours de laquelle, Tartaglia lui transmis sa méthode, mais en lui faisant jurer qu'il ne la répéterai à personne. Cette méthode de résolution, vous en connaissez déjà une partie, car Tartaglia l'avait rédigée en vers et il s'agit du poème mathématique que nous avons vu dans le premier chapitre de ce cours.

Texte original (en italien)	Traduction

Quando chel cubo con le cose appresso Se agguaglia à qualche numero discreto Trouan dui altri differenti in esso. Dapoi terrai questo per consueto Che'llor produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo generale Delli lor lati cubi ben sottratti Varra la tua cosa principale.	Quand le cube et les choses Se trouvent égalés au nombre Trouves-en deux autres qui diffèrent de celui ci. Ensuite comme il est habituel Que leur produit soit égal Au cube du tiers de la chose. Puis dans le résultat général, De leurs racines cubiques bien soustraites, Tu obtiendras ta chose principale.

Eh oui, car à cette époque, nous en sommes encore à l'algèbre rhétorique.

Dans un premier temps, Cardan tint sa parole. Jusqu'au jour où, ayant pu consulter les notes laissées d'un autre mathématicien, Scipionne del Ferro, mort en 1526, il réalisa que ce dernier avait déjà découvert en partie la règle de Tartaglia. À partir de là, Cardan se considéra libéré de sa promesse puisque même si Tartaglia ne lui avait pas expliquée sa méthode, il l'aurait à ce moment découverte dans les papiers de del Ferro.

En 1545, Cardan publia l'*Ars Magna* dans lequel il présente en détail la méthode de résolution des équations du troisième degré. Et comme la vie est injuste, cette méthode se nomme depuis lors la méthode de Cardan.

Il serait toutefois injuste de présenter Cardan comme un simple voleur de formule. En réalité il est probable que del Ferro et Tartaglia n'aient connu la méthode que sous forme de recette, mais sans l'avoir vraiment démontrée. Un peu comme si pour les équations du second degré, vous aviez trouvé la formule $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ en tâtonnant, mais sans avoir démontré rigoureusement qu'elle est vraie à partir de la forme canonique ou de la forme factorisée. Dans l'Ars Magna, Cardan démontre très rigoureusement les formules de Tartaglia et en ce sens a réellement apporté sa pierre à la résolution des équations du troisième degré.

Niccolo Tartaglia & Girolamo Cardano

Ce n'est pas tout ça, mais je suis sûr que vous brûlez de voir à quoi ressemblent les formules de Cardan. Je vous préviens, la formule n'est pas belle à voir. Alors prenez une grande respiration et c'est parti, voici les trois solutions:

$$\begin{aligned}
x_1 =& -\frac{b}{3a}\\
&-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}\\
&-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 =& -\frac{b}{3a}\\
&+\frac{1+i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}\\
&+\frac{1-i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 =& -\frac{b}{3a}\\
&+\frac{1-i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}\\
&+\frac{1+i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right]}
\end{aligned}$$

Ça fait peur hein? Bien sûr ces solutions ne correspondent qu'au cas ou il y a effectivement trois solutions. Comme pour les équations du second degré il est possible qu'il y en ait moins. Il peut n'y en avoir que deux ou bien une seule, mais pas zéro: une équation du troisième degré a toujours au moins une solution!

Dans les formules ci-dessus, vous avez peut-être remarqué la présence d'un i. Ce i est un nombre égal à la racine carrée de -1. Jusqu'à cette époque les mathématiciens pensaient que seuls les nombres positifs possédaient des racines carrées, seulement la résolution des équations du troisième degré nécessitait d'effectuer ce genre d'opérations. Tartaglia a eu le mérite de ne pas se laisser impressionner par ces formalités, même si pour lui et pour Cardan ces objets n'étaient que des intermédiaires de calculs et pas des nombres à part entière. En effet, quand l'équation possède trois solutions, les formules ci-dessus donnent bien des nombres réels, même si l'on utilise i pour les calculs intermédiaires.

II.3.1.2. Les équations du quatrième degré

Après les équations du troisième degré, celles du quatrième tombèrent immédiatement.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

En 1540, un élève de Cardan du nom de Ludovico Ferrari avait découvert une méthode permettant de trouver les solutions d'une équation de degré 4 pourvu que l'on sache résoudre les équations de degré 3. Ainsi, ces solutions furent connues dès que Cardan parvint à obtenir la formule de Tartaglia. La méthode de résolution du degré 4 fut publiée dans l'Ars Magna de Cardan en 1545, en même temps que celle du degré 3.

II.3.2. Deux grands théorèmes

Un, deux, trois, quatre… Pourquoi ne pas continuer en si bonne voie en s'attaquant aux équations de degré 5 ou plus. C'est ce que firent de nombreux mathématiciens dans les siècles qui suivirent la publication de l'Ars Magna de Cardan. Hélas sans succès au début, jusqu'à ce que de nouvelles approches permettent de jeter un nouvel éclairage sur ces équations.

II.3.2.1. Le théorème fondamental de l'algèbre

Nous l'avons vu dans la section précédente, la méthode de résolution des équations de degré 3, obligeait l'utilisation de racines carrées de nombres négatifs. Au départ, ces racines carrées n'étaient pas considérées comme des vrais nombres, mais seulement des artifices intermédiaires pour faire les calculs. Mais avec le temps, les mathématiciens se sont mis à bien aimer ces nombres et à les apprivoiser. Ils les nommèrent les nombres complexes.

Peu à peu, on se mit aussi à chercher les solutions des équations qui étaient des nombres complexes. Grâce à ces nombres, toutes les équations du second degré avaient désormais des solutions puisque l'on pouvait prendre la racine carrée du discriminant Δ même lorsque celui-ci est négatif.

Et c'est grâce aux nombres complexes que l'on put formuler un résultat très général sur les équations de n'importe quel degré. Ce résultat se nomme **le théorème fondamental de l'algèbre** ou **théorème de d'Alembert-Gauss** et considère les équations de degré n quelconque:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Le théorème dit alors que cette équation possède une forme factorisée composée de la multiplication de n petites équations du premier degré:

$$a_n(x-_1)(x-_2)\cdots(x-_{n-1})(x-_n) = 0.$$

Ainsi, dans cette forme factorisée, les nombres $_i$ sont les nombres complexes solution de notre équation.

Attention, on pourrait être tenté de dire que toutes les équations de degré n ont n solutions, mais il y a une petite subtilité car certains $_i$ peuvent être égaux entre eux. On parle alors de solutions multiples. C'est par exemple ce qui se produit quand $\Delta = 0$ pour les équations du second degré.

II.3.2.2. Ruffini, Abel et Galois

Le théorème fondamental de l'algèbre est bien joli, il dit que toutes ces équations ont des solutions, mais il ne nous donne pas de formule pour les calculer. Pour l'instant nous ne disposons toujours de formules concrètes que pour les degrés 1, 2, 3 et 4. Et pendant plusieurs siècle personne n'en trouva pour les degrés supérieurs, au point que beaucoup de mathématiciens avaient fini par se détourner de ce problème.

Jusqu'à ce qu'au début du XIXe siècle se produisit un coup de théâtre: un jeune mathématicien norvégien du nom de Niels Henrik Abel démontra que cela n'était pas possible. Il n'existe pas de formule donnant les solutions d'une équation de degré 5 ou plus. Avant lui, le mathématicien italien Paolo Ruffini avait également découvert cette impossibilité mais n'était pas parvenu à la prouver complètement.

Pour être plus précis, il n'existe pas de formule utilisant les quatre opérations de base et des racines. En effet, vu que les équations polynomiales n'utilisent que les quatre opérations et des puissances, il est tout naturel de vouloir les résoudre en n'utilisant que leurs opérations inverses. C'est ceci dont Abel montra que c'était impossible.

Ce théorème se nomme le **théorème d'Abel**, ou parfois **théorème d'Abel-Ruffini**.

L'histoire ne s'arrête pas tout à fait ici, car si Abel avait démontré qu'il n'y avait pas de formule générale pour toutes les équations du cinquième degré, cela ne signifiait pas forcément que ces équations ne pouvaient pas être résolues individuellement et leurs solutions exprimées à l'aide des quatre opérations et des racines.

C'est le mathématicien français Évariste Galois qui mit un point final à cet espoir en montrant que la plupart des équations de degré 5 ou plus ne pouvaient pas être résolues de cette façon. C'est le cas par exemple de l'équation suivante:

$$x^5 - 3x - 1 = 0.$$

Ruffini, Abel et Galois

L'histoire est cruelle car Abel mourut de la tuberculose à 26 ans et Galois mourut à 20 ans à la suite d'un duel. Malgré son jeune âge, Galois avait développé pour pouvoir démontrer la non résolubilité des équations une théorie révolutionnaire que les mathématiciens qui suivirent mirent plusieurs décennies à comprendre et qui continue d'être utilisée de nos jours: **la théorie de Galois**.

Cela laisse rêveur sur ce qu'aurait pu accomplir ces deux mathématiciens de génie s'ils avaient vécu plus longtemps.

II.4. Équations non polynomiales

Introduction

Dans les trois derniers chapitres, nous avons étudié les équations polynomiales, c'est-à-dire celles faisant intervenir les quatre opérations de base et les puissances. Mais il existe encore de nombreuses opérations en mathématiques que l'on peut mettre dans nos équations:

— les racines carrée, racines cubiques, et racines d'ordre supérieur;
— les logarithmes et les exponentielles;
— les fonctions trigonométriques: sinus, cosinus, tangentes…

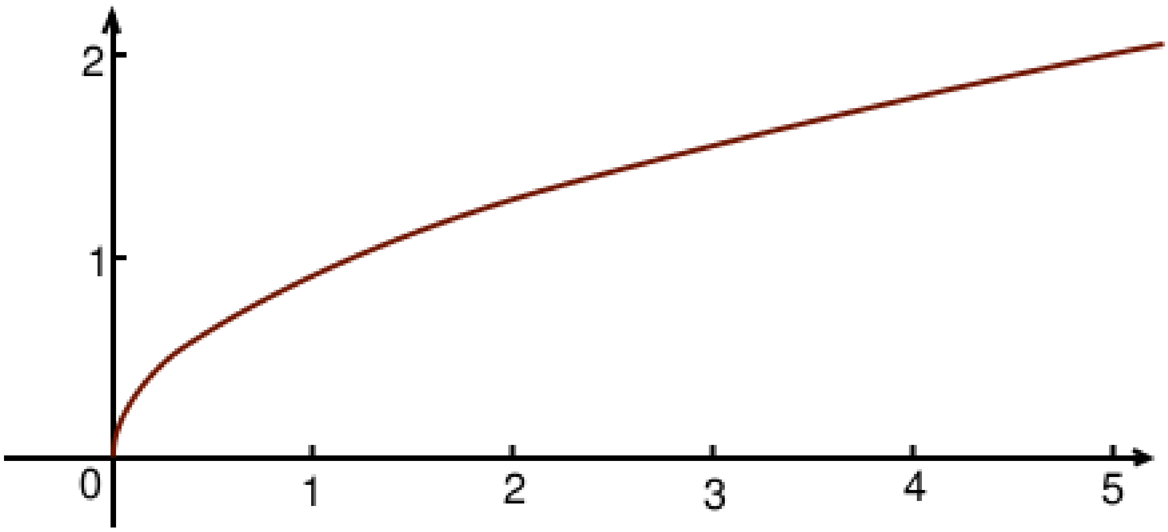
J'en passe et c'est sans compter les multiples combinaisons que l'on peut faire en utilisant toutes ces fonctions! Lorsque l'on se trouve face à une telle transformation, le premier principe que l'on cherche à appliquer est toujours celui que nous avons vu dans la première partie de ce cours: remonter vers l'inconnue en appliquant les transformations inverses. C'est ce que nous allons apprendre à faire dans ce chapitre.

> Ce cours n'est pas un cours sur les fonctions et n'a pas pour but d'expliquer comment fonctionnent les opérations qui suivent. Si vous n'en connaissez pas certaines, reportez-vous à un cours sur le sujet ou passez votre chemin le temps de les avoir apprises.

II.4.1. Racines

II.4.1.1. Racine carrée

Commençons par la **racine carrée**. Dans les nombres réels, la fonction racine carrée n'est définie que sur les nombres positifs et donne toujours un nombre positif. Son graphe est le suivant:



La fonction racine carrée est l'inverse du carré, ainsi, pour la remonter, il suffit de prendre le carré. Si par exemple on a l'équation suivante:

$$\sqrt{x} = 3,$$

sa seule solution est $x = 3^2 = 9$. Si en revanche la racine donne un résultat négatif, comme dans l'équation suivante:

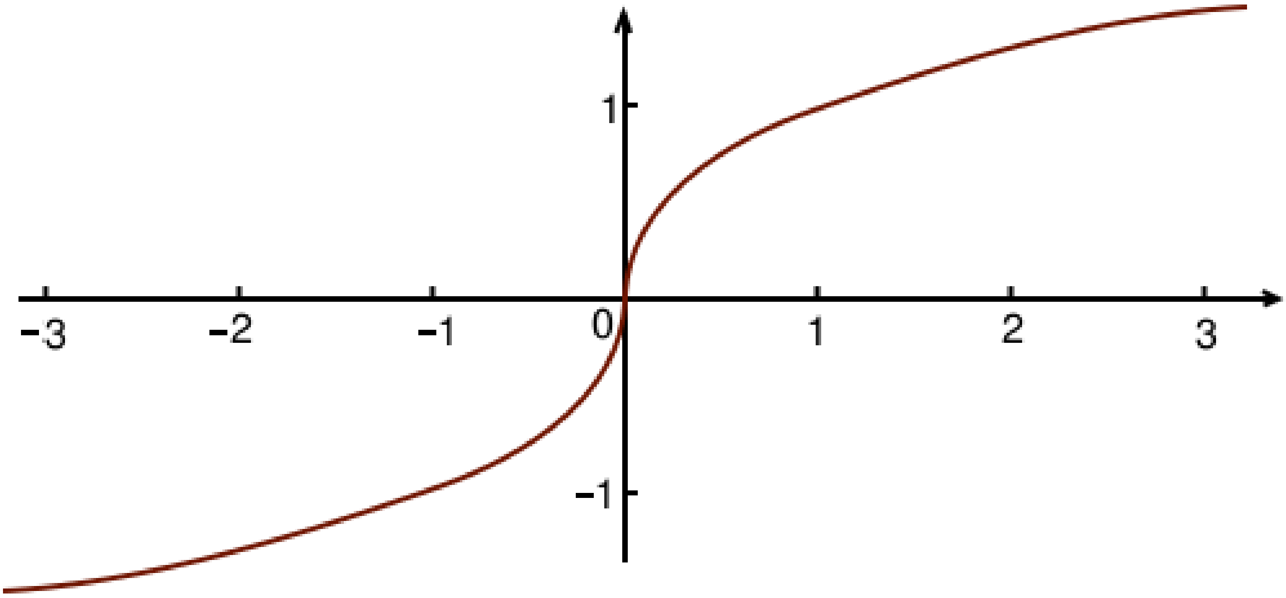
$$\sqrt{x} = -5,$$

alors l'équation n'a pas de solution.

> ! Attention, à ne pas élever l'équation précédente au carré: c'est un piège. En effet, comme nous l'avons vu dans la première partie du cours, le fait d'élever une équation au carré peut faire apparaître de fausses solutions et c'est se qui se passe ici: on obtient $x = (-5)^2 = 25$, mais 25 n'est pas réellement solution puisque $\sqrt{25} = 5$.

II.4.1.2. Racine cubique

Pour la **racine cubique** c'est plus simple car elle est définie pour tous les nombres, mêmes négatifs. Son graphe est le suivant.



Pour remonter une racine cubique, il suffit de prendre le cube. Par exemple, l'équation suivante:

$$\sqrt[3]{x} = -3,$$

possède une unique solution: $x = (-3)^3 = -27$.

II.4.1.3. Racines d'ordre supérieur

Pour les racines d'ordre supérieur, la règle est la suivante:

- si la racine est paire, alors, elle se comporte comme la racine carrée et n'est définie que pour les nombres positifs;
- si la racine est impaire, alors, elle se comporte comme la racine cubique et est définie pour tous les nombres réels.

Voici trois exemples de résolution:

Équation	Résolution
$\sqrt[6]{x} = 5$	$\sqrt[6]{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x}^6 = 5^6$ $\Leftrightarrow x = 15625.$
$\sqrt[12]{x} = -3$	12 est pair et -3 est négatif: pas de solution.
$\sqrt[7]{x} = -2$	$\sqrt[7]{x} = -2 \Leftrightarrow \sqrt[7]{x}^7 = (-2)^7$ $\Leftrightarrow x = -128.$

II.4.2. Exponentielles et logarithmes

II.4.2.1. Exponentielles

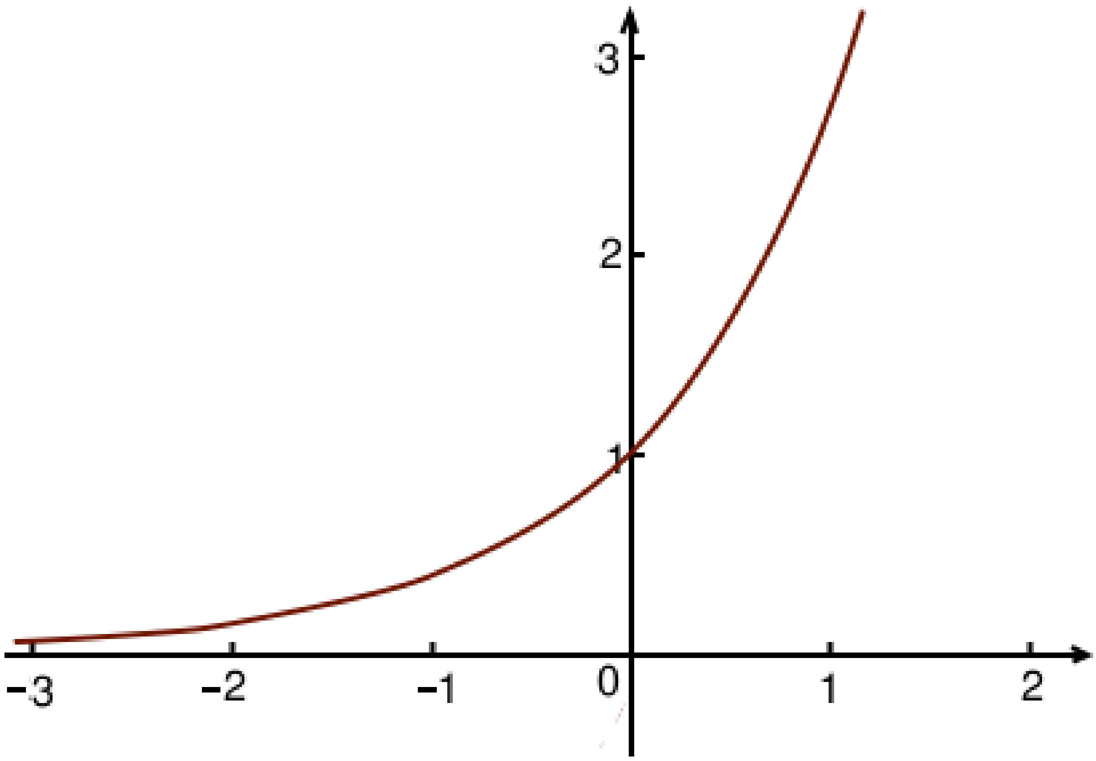
On parle d'exponentielle lorsque l'on a une puissance, mais que l'inconnue x se trouve en exposant comme dans l'équation suivante:

$$3^x = 10.$$

L'opération qui permet de remonter l'exponentielle est le logarithme de même base. Ainsi, la solution de l'équation ci-dessus est $\log_3(10)$.

> Dans cet exemple, on a une exponentielle de base 3, mais la plupart du temps, en mathématiques, on rencontre l'exponentielle de base $e \approx 2,718\ldots$ qui possède des propriétés qui la rendent agréable à manier. Le logarithme de base e se nomme le logarithme népérien et se note ln.

Les graphes des fonctions exponentielles ressemblent à ceci:



Comme pour la racine carrée, vous voyez que cette fonction ne prend pas de valeurs négatives. Ainsi ces équations n'ont pas de solution si elles demandent à une exponentielle d'être négative. Si au contraire l'exponentielle est bien positive, alors elle s'inverse grâce au logarithme de même base.

Voici deux exemples d'équations exponentielles:

Équation	Résolution
$2^x = 7$	$2^x = 7 \Leftrightarrow log_2(2^x) = log_2(7)$ $\Leftrightarrow x = log_2(7) \approx 2,8...$
$5^x = -1$	-1 est négatif: pas de solutions.

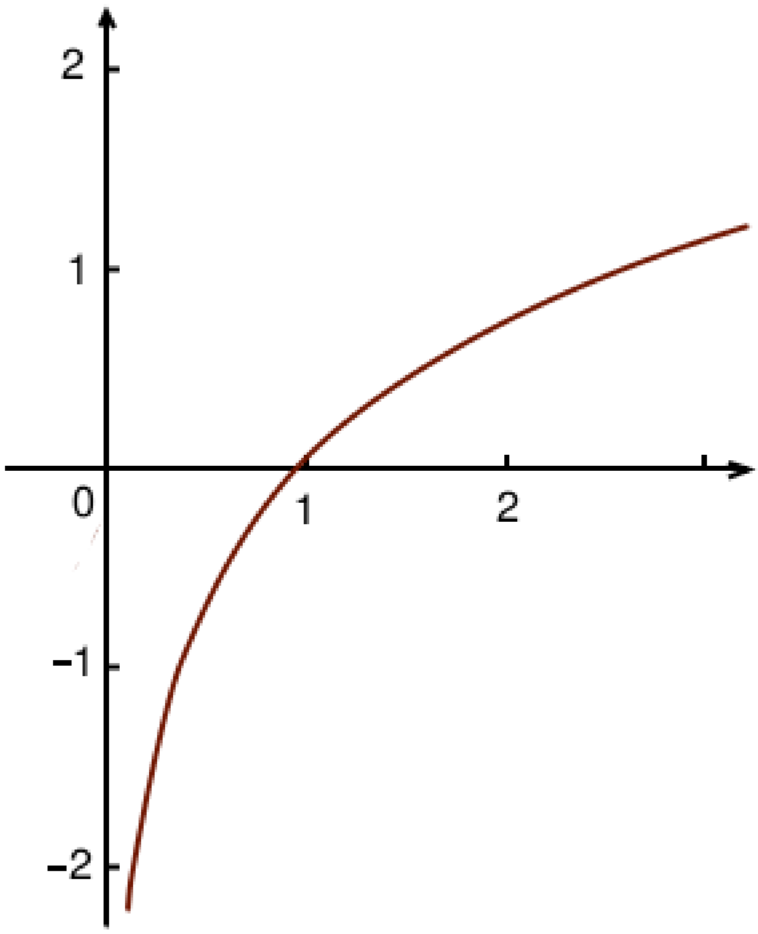
Notez que l'exponentielle est toujours donnée dans une base positive. Les exponentielles à base négative comme par exemple $(-4)^x$ ne sont pas définies en général et demandent l'intervention des nombres complexes quand cela est possible.

II.4.2.2. Logarithmes

Intéressons nous maintenant aux équations faisant intervenir un logarithme, comme par exemple:

$$log_2(x) = 4.$$

Les fonctions logarithme ont un graphe de la forme suivante:



Cette fonction passe par toutes les valeurs, positives et négatives, elles sont donc toujours résolubles. Pour remonter un logarithme, on utilise l'exponentielle de même base, voici un exemple:

Équation	Résolution
$log_2(x) = 4$	$log_2(x) = 4 \Leftrightarrow 2^{log_2(x)} = 2^4$ $\Leftrightarrow x = 2^4 = 16.$

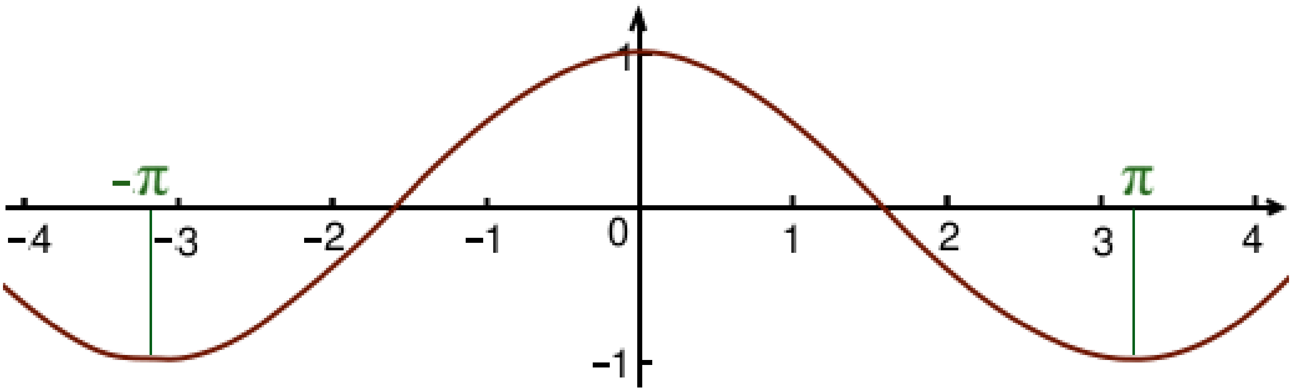
II.4.3. Fonctions trigonométriques

Passons maintenant aux fonctions trigonométriques, il y en a principalement trois: le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente**.

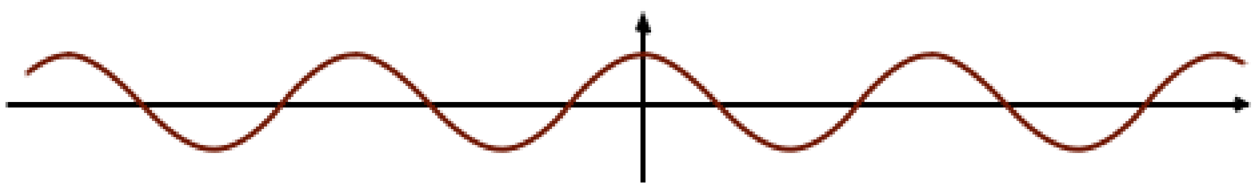
> Attention, la définition des fonctions trigonométriques dépend de l'unité d'angle choisie. La mesure la plus classique est celle en radians pour laquelle, un tour complet mesure 2π (soit environ 6,28), un demi-tour mesure π et un angle droit mesure $\pi/2$. C'est cette convention que nous utiliserons.

II.4.3.1. Le cosinus

Le graphe du cosinus ressemble à ceci:



En fait, le cosinus est 2π-périodique ce qui signifie que si on fait un zoom arrière, le motif se répète tous les 2π, il oscille entre -1 et 1:



Tout d'abord remarquons que comme cette fonction ne sort pas d'un intervalle allant de -1 à 1, alors l'équation

$$\cos(x) = a$$

ne possède pas de solution si $a < -1$ ou si $a > 1$.

Si en revanche $-1 \leq a \leq 1$, nous nous retrouvons dans une situation que nous n'avons encore jamais connue car avec cette périodicité, les équations faisant intervenir un cosinus ont une infinité de solutions. Regardons par exemple l'équation suivante:

$$cos(x) = \frac{1}{2}.$$

On peut voir sur le graphe que la fonction cosinus passe une infinité de fois par la valeur $1/2$, il y a donc bien une infinité de solutions.

Si vous connaissez vos tables trigonométriques, vous savez que l'un des angles dons le cosinus vaut $1/2$ est celui de $\pi/3$, ainsi l'une des solutions est $x = \pi/3$. À partir de là, vu que la fonction est 2π-périodique, tous les nombres suivants sont solutions:

- $\pi/3$;
- $\pi/3 + 2\pi$;
- $\pi/3 + 4\pi$;
- $\pi/3 + 6\pi$;
- $\pi/3 + 10000\pi$;
- $\pi/3 - 2\pi$;
- $\pi/3 - 4\pi$;
- $\pi/3 - 21286328\pi$.

Bon je ne vais pas les écrire tous car vous avez compris qu'il y en a une infinité. Tous les nombres de la forme $\pi/3 + 2k\pi$ avec k un nombre entier (positif ou négatif) sont solutions.

Mais même quand on a donné ceux-là on ne les a pas encore tous! En effet, vu que la fonction cosinus est paire (c'est-à-dire que son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical) alors à chaque fois que l'on a une solution, son opposé est également solution. Il faut donc ajouter toutes les solutions suivantes:

- $-\pi/3$;
- $-\pi/3 - 2\pi$;
- $-\pi/3 - 4\pi$;
- $-\pi/3 - 6\pi$;
- $-\pi/3 - 10000\pi$;
- $-\pi/3 + 2\pi$;
- $-\pi/3 + 4\pi$;
- $-\pi/3 + 21286328\pi$.

Au final, les solutions de l'équation $\cos(x) = 1/2$ sont les nombres de la forme $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

?

Mais comment fait-on si le cosinus de l'inconnue n'est pas égal à $1/2$, mais à un autre nombre?

On utilise la fonction **arc cosinus**! Si a est un nombre entre -1 et 1, alors $\arccos(a)$ est le nombre dont le cosinus vaut a qui se trouve entre 0 et π. Pour reprendre l'exemple ci-dessus, on a

$$\arccos(1/2) = \pi/3.$$

Ainsi, par un raisonnement identique à celui que nous venons de faire pour $1/2$, si on considère l'équation

$$\cos(x) = a,$$

avec a compris entre -1 et 1, alors une de ses solutions est $\arccos(a)$ et on peut en déduire que toutes ses solutions sont les nombres de la forme $x = \pm\arccos(a) + 2k\pi$ avec $k\mathbb{Z}$.

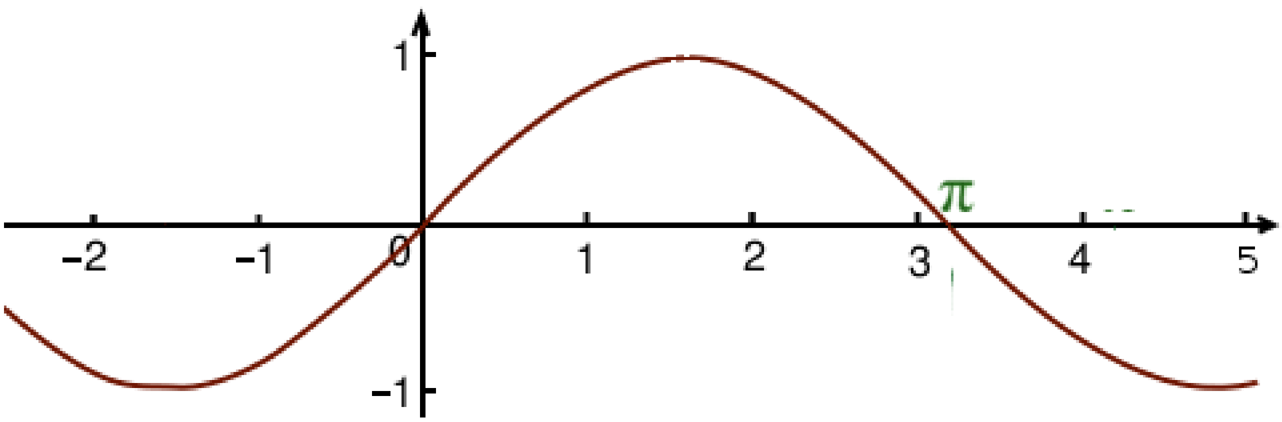
Notez que c'est le même principe que pour le carré qui donne deux solutions: dans ce cas, le symbole $\sqrt{\ }$ désigne la racine positive et la seconde solution se trouve en prenant l'opposé. Dans les deux cas, on a un symbole spécifique qui donne l'une des solutions et à partir de cette solution, on reconstruit toutes les autres.

En résumé, voici deux exemples d'équations avec un cosinus:

Équation	**Résolution**
$\cos(x) = 0,3$	$\cos(x) = 0,3 \Leftrightarrow x = \pm\arccos(0,3) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = 7$	7 est plus grand que 1: pas de solution.

II.4.3.2. Le sinus

Le fonctionnement est identique pour le sinus. Son graphe est le même que pour le cosinus, mais décalé de $\pi/2$ vers la droite.



La fonction qui permet de retrouver le nombre entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus est égal à un nombre donné est l'**arc sinus**. Ainsi, si on a l'équation suivante:

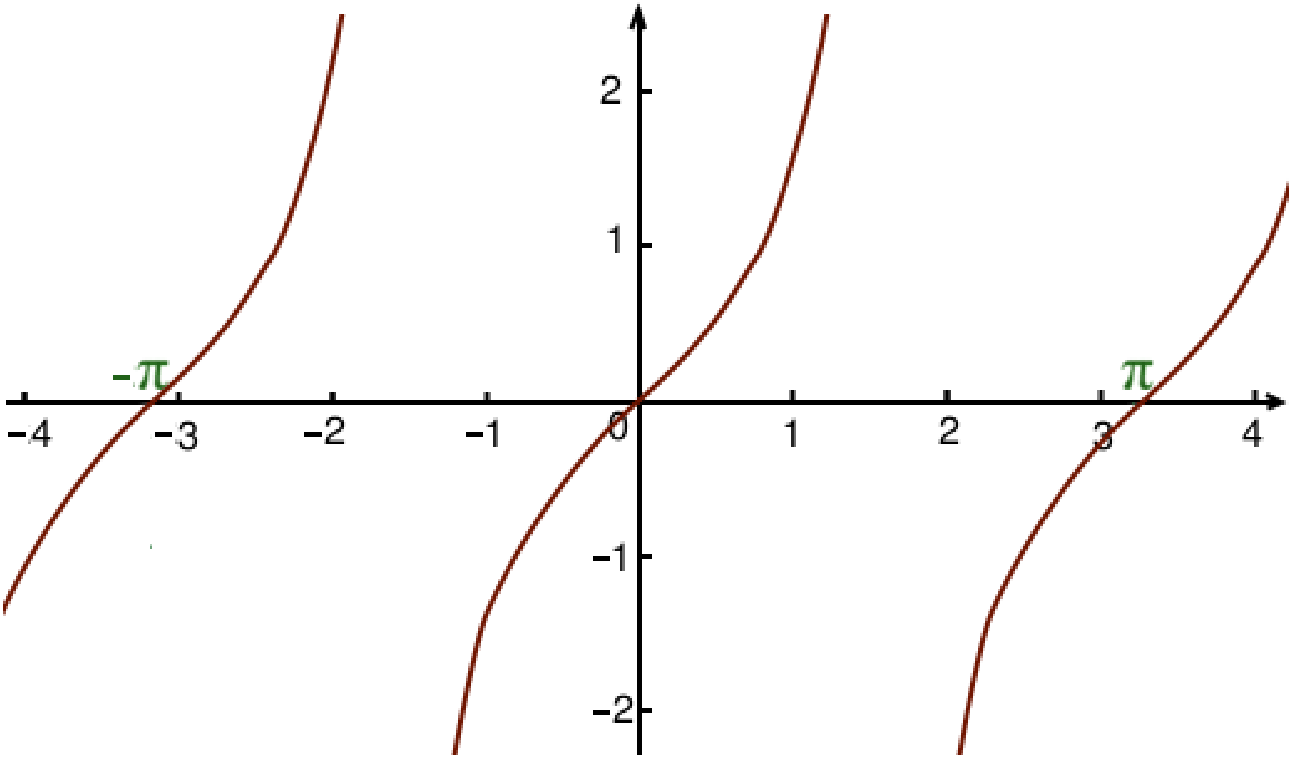
$$\sin(x) = a,$$

avec a compris entre -1 et 1, alors $\arcsin(a)$ est l'une des solutions. Comme pour le cosinus on trouve d'autres solutions en ajoutant des multiples de 2π à ce nombre.

D'autre part, comme le graphe est symétrique par rapport à un axe vertical d'abscisse $\pi/2$, cela signifie que $\pi - \arcsin(a)$ est aussi une solution. Au finale, l'ensemble des solutions de l'équation est composé des nombres de type $\arcsin(a) + 2k\pi$ ou $-\arcsin(a) + (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

II.4.3.3. La tangente

Pour la tangente, on a cette fois un graphe π-périodique:



Vous remarquez que contrairement au cosinus et au sinus, la tangente passe par toutes les valeurs. Ainsi, l'équation

$$\tan(x) = a$$

a toujours des solutions. Pour trouver la solution qui se trouve entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on utilise l'**arc tangente**. Ainsi, les solutions de l'équation sont les nombres de la forme $\arctan(a) + k\pi$ avec k un nombre entier.

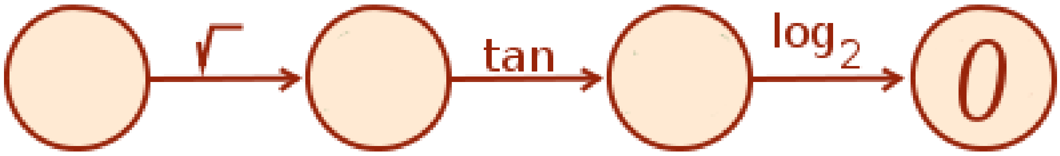
! Vous remarquez qu'on ajoute bien $k\pi$ et non pas $2k\pi$ puisque la tangente est π-périodique.

II.4.4. Un exemple

Pour récapituler tout ce que nous venons de dire, j'ai envie de vous lancer un petit défi. Sauriez-vous résoudre l'équation suivante:

$$\log_2(\tan(\sqrt{x})) = 0.$$

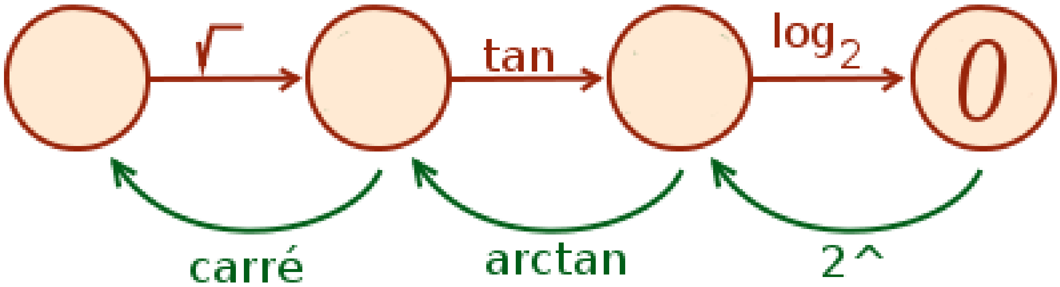
Si l'on reprend nos bons vieux schémas d'équations, on a donc ceci:



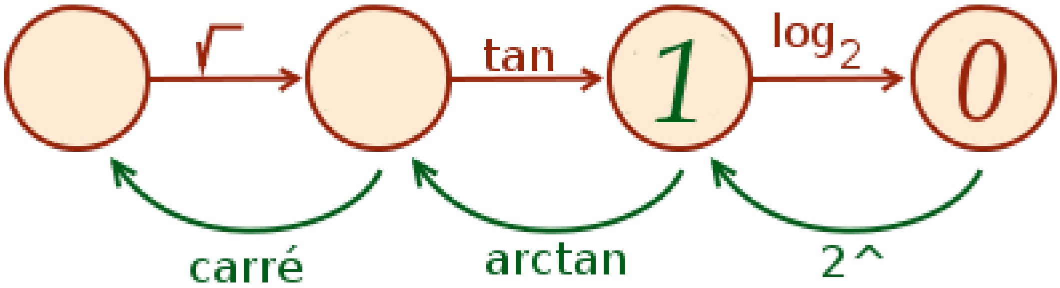
Essayez de trouver la (ou les) solution(s) par vous-même avant de regarder les explications qui suivent.

II.4.4.1. Solution

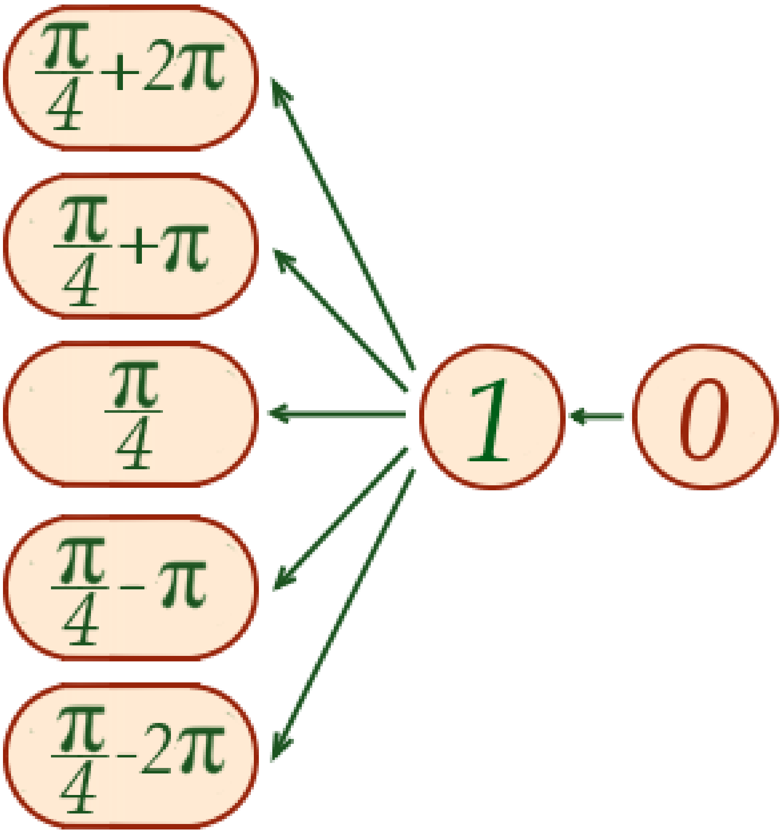
Comme nous l'avons déjà fait avec les opérations élémentaires, il s'agit de remonter vers l'inconnue en suivant le parcours vert de droite à gauche:



La première étape est facile, nous savons que pour remonter un logarithme, il faut utiliser une exponentielle de même base, ainsi on trouve $2^0 = 1$.

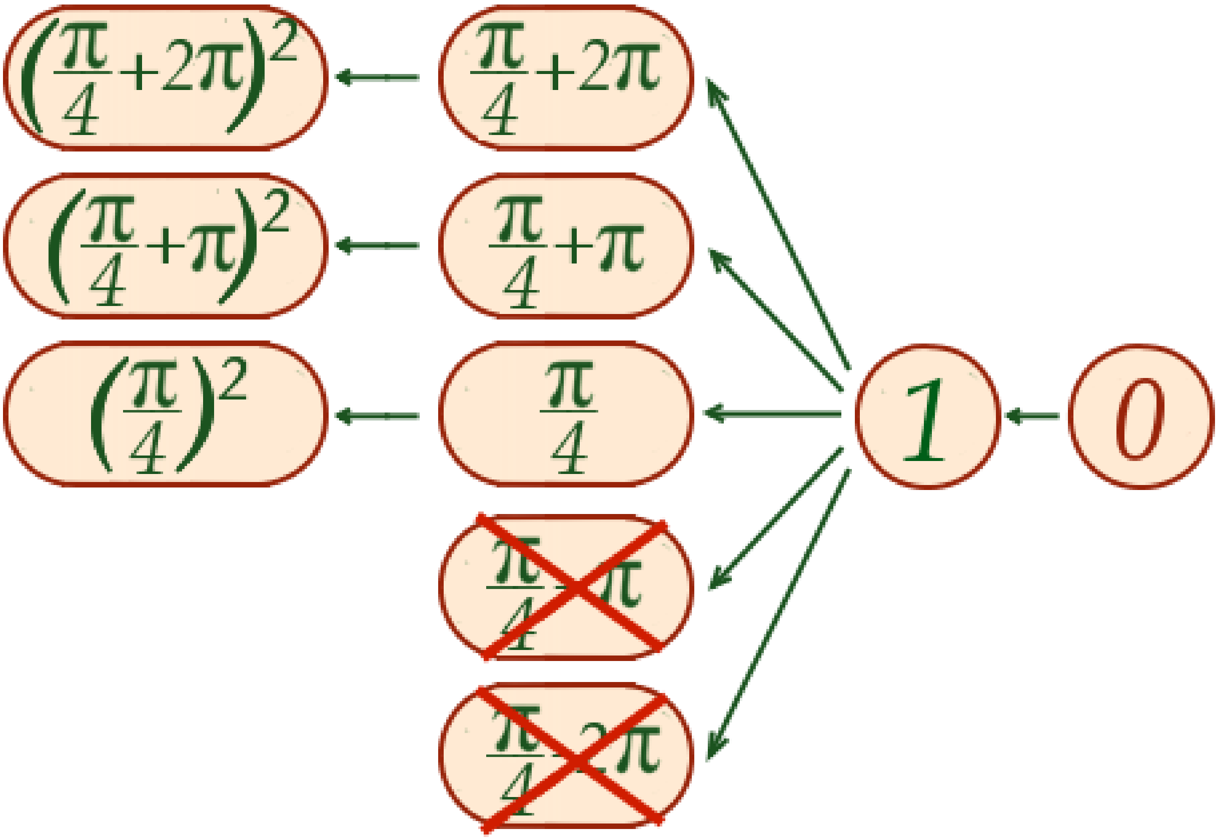


Pour remonter la tangente, on utilise l'arc tangente. Si vous regardez dans une table trigonométrique vous pourrez voir que $\arctan(1) = \pi/4$. Mais il ne faut pas oublier que comme la tangente est π-périodique, on a une infinité de solutions en ajoutant les multiples de π à $\pi/4$.



Seules cinq solutions sont représentées sur le schéma, mais il ne faut pas oublier qu'il y en a une infinité. Il faut imaginer que le schéma se prolonge infiniment vers le haut et vers le bas avec tous les nombres de la forme $\pi/4 + k\pi$.

Il ne reste plus qu'à remonter la racine. Rappelez-vous qu'il n'y a de solution que quand le résultat de la racine est positif. Ainsi, la moitié des nombres que nous avaient donnés la tangente sont sans issue. Il nous reste cependant tous ceux de la forme $\pi/4 + k\pi$ avec k positif qu'il suffit de mettre au carré.



Et voilà le travail! Les solutions de notre équation sont les nombres de la forme $(\pi/4 + k\pi)^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

II.4.4.2. Résolution sérieuse

Nous venons de résoudre notre équation grâce à nos schémas, mais bien sûr, le même raisonnement peut se faire uniquement en écriture algébrique:

$$\begin{aligned}
\log_2(\tan(\sqrt{x})) = 0 &\Leftrightarrow 2^{\log_2(\tan(\sqrt{x}))} = 2^0, \\
&\Leftrightarrow \tan(\sqrt{x}) = 1, \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = \arctan(1) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow x = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Encore une fois, si cette écriture algébrique vous parait rébarbative, faîtes tout de même l'effort de la lire en détail en comparant à la résolution par les schémas. Cette écriture est réellement beaucoup plus puissante et agréable à utiliser une fois qu'on la maîtrise.

II.5. Méthodes de résolution numérique

Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents quelques méthodes permettant de trouver les solutions des équations. Mais hélas, toutes les équations ne sont pas résolubles de façon exacte, c'est-à-dire que l'on ne peut pas les exprimer par une formule composée d'opérations classiques. 🙁

Dans ce cas, tout n'est cependant pas perdu. À défaut d'avoir une formule exacte, on peut chercher une valeur numérique approchée. Dans ce chapitre, nous allons voir deux méthodes de base permettant de trouver une approximation aussi précise que l'on veut des solutions.

> ! Comme pour le chapitre précédent, nous allons utiliser quelques résultats d'analyse et d'étude des fonctions réelles. Si vous ne les connaissez pas, soit courrez consulter un cours sur les fonctions, soit croyez sur parole tout ce que je vais dire (c'est risqué). 😉

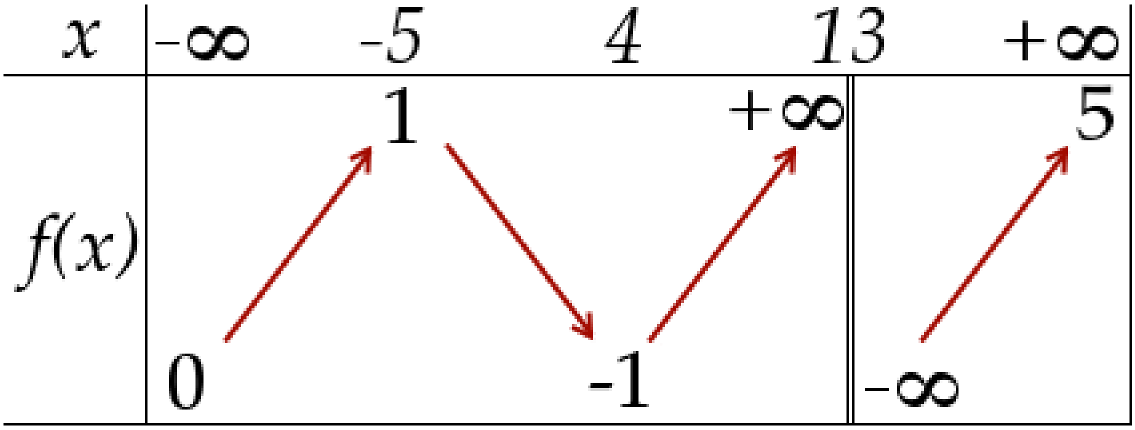
II.5.1. Tableaux de variations

Nous avons vu que la façon la plus générale de présenter une équation est la suivante:

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction réelle. À partir de là, l'analyse, qui est la branche des mathématiques dans laquelle on étudie les fonctions réelles (et plein d'autres choses), nous offre toutes sortes d'outils permettant d'étudier les variations de f.

Ce qui va nous intéresser pour la résolution des équations ce sont les tableaux de variation. Ce sont des tableaux dans lesquels on récapitule les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction. En voici un:

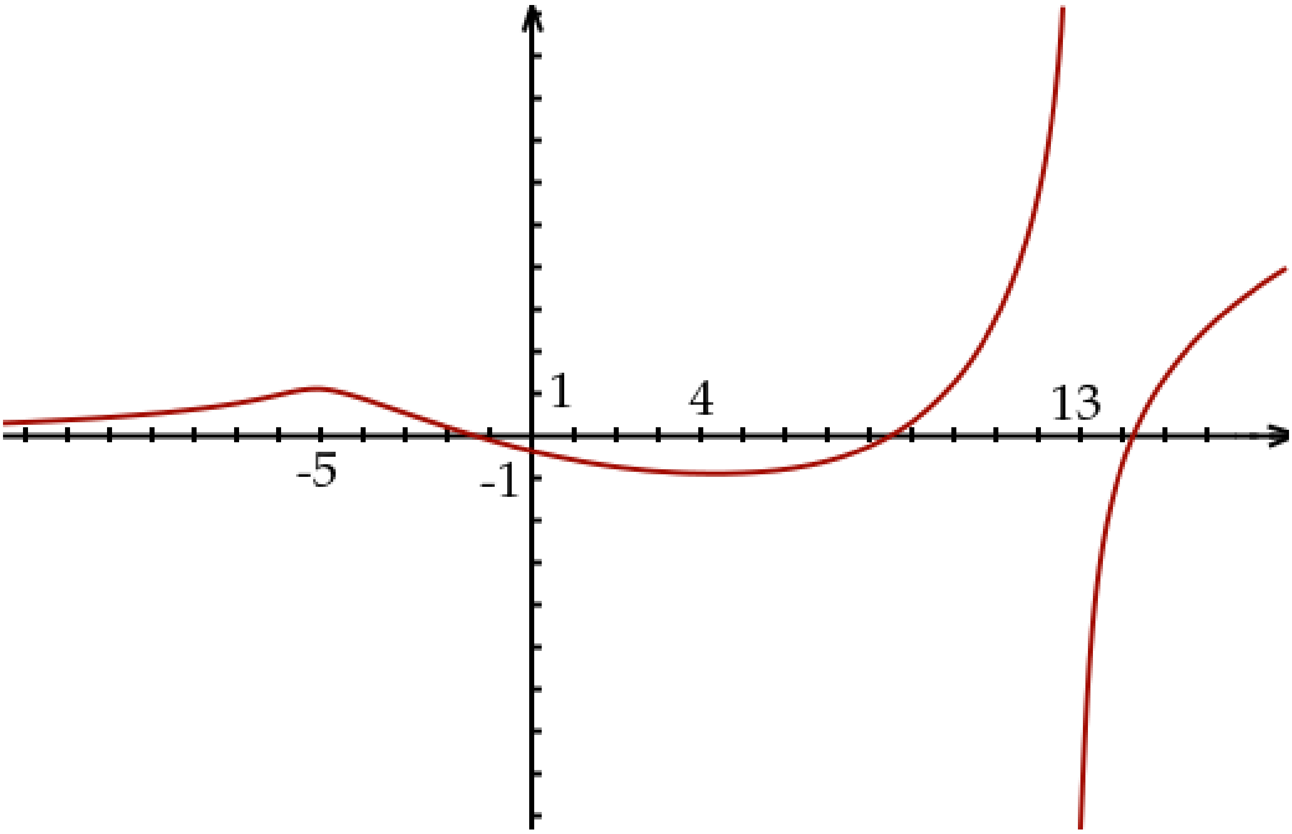


> Nous n'expliquerons pas dans ce cours comment obtenir ces tableaux de variations. Si vous voulez en savoir plus, reportez-vous à un cours sur les fonctions. 🙂

Le tableau ci-dessus s'interprète de la façon suivante:

— en $-\infty$ la fonction tend vers 0 et elle est croissante de $-\infty$ à -5 où elle vaut 1;
— de -5 à 4, la fonction est décroissante et vaut -1 en 4;
— de 4 à 13 elle est croissante et tend vers $+\infty$ en 13 où elle n'est pas définie;
— de 13 à $+\infty$ elle est croissante, elle tend vers $-\infty$ en 13 et vers 5 en $+\infty$.

En clair, son graphe ressemble à ceci:



On peut donc en déduire que notre équation possède exactement trois solutions!

— La première solution se trouve entre -5 et 4.

— La deuxième solution se trouve entre 4 et 13.
— La troisième solution se trouve entre 13 et $+\infty$.

Rappelez-vous que les solutions de l'équation correspondent aux nombres pour lesquels la fonction vaut 0, c'est-à-dire aux points où son graphe croise l'axe horizontal.

En clair, pour chaque intervalle sur lequel la fonction est monotone (c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante), il suffit de regarder les valeurs qu'elle prend aux bornes: si une de ces valeur est positive et l'autre négative, alors c'est que la fonction est passée par 0 entre les deux.

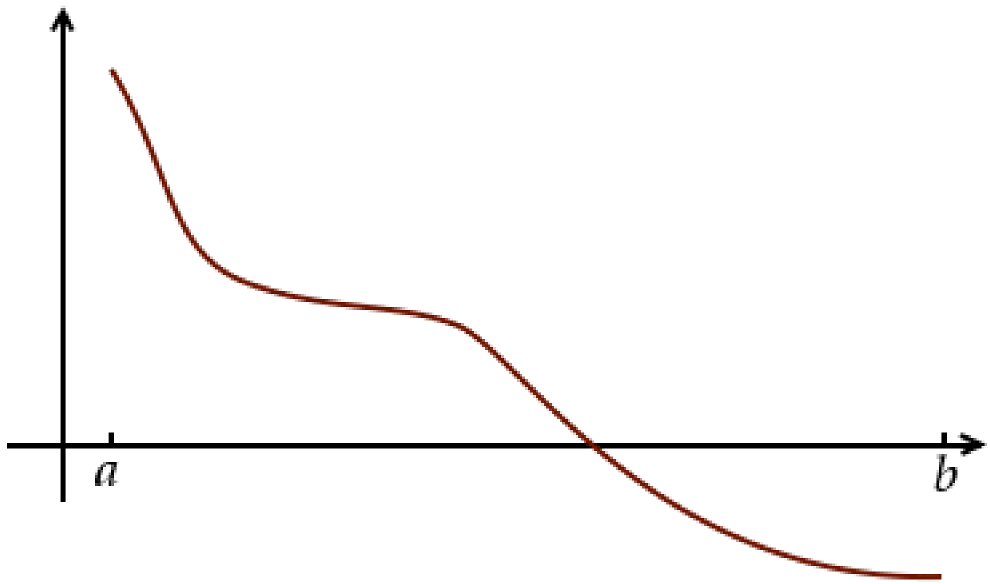
> *i* En réalité, ce raisonnement n'est juste qu'à condition que la fonction soit continue, c'est-à-dire qu'elle ne fasse pas de décrochages lui permettant de sauter du positif au négatif sans passer par 0. Mais rassurez-vous, dans 99% des cas classiques, les fonctions sont bien continues. 🍊

Nous avons donc cerné nos trois solutions dans trois intervalles. Alors bien sûr, ce n'est pas encore très précis, mais nous allons voir dans les sections suivantes comment se rapprocher de plus en plus de ces solutions.

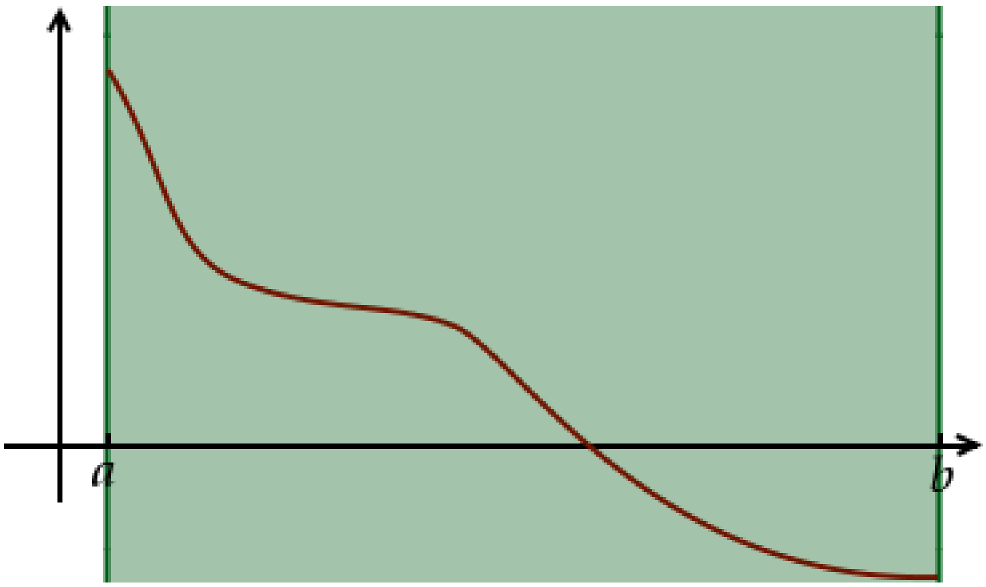
II.5.2. Méthode de dichotomie

Une fois que l'on connait un intervalle sur lequel la fonction est croissante ou décroissante et qui passe par zéro, il nous reste à le localiser. Pour cela, la méthode la plus élémentaire est la **méthode dichotomique**.

Prenons donc une fonction définie entre deux nombres a et b comme ceci:



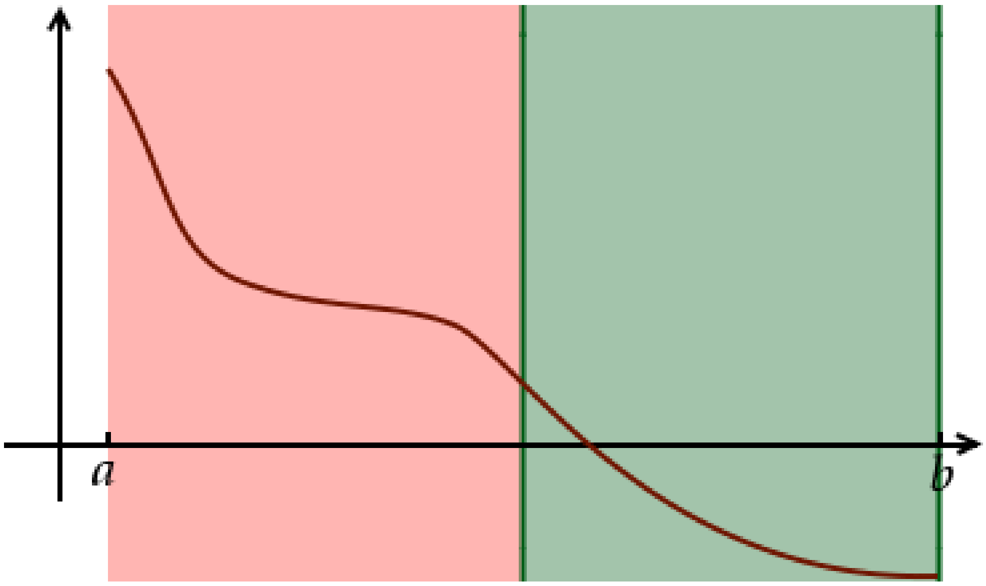
Ici la fonction est décroissante, mais ce que nous allons dire marcherait aussi bien si elle était croissante. Au début, tout ce que nous savons, c'est que la solution de notre équation se trouve entre a et b. Schématisons ceci par une zone verte que nous allons réduire pas à pas:



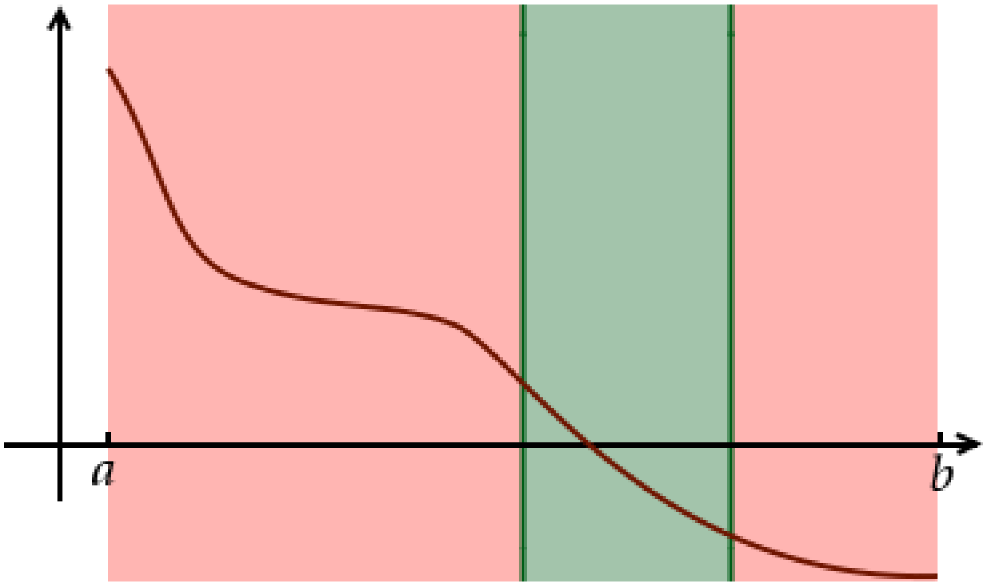
Nous allons maintenant regarder la valeur de la fonction au milieu de l'intervalle, c'est-à-dire pour la valeur moyenne $(a+b)/2$. Il y a alors deux cas de figure:

— si la fonction est positive, c'est que le zéro se trouve dans la deuxième moitié de l'intervalle $[a,b]$;
— si au contraire elle est négative, alors le zéro se trouve dans la première moitié de l'intervalle $[a,b]$.

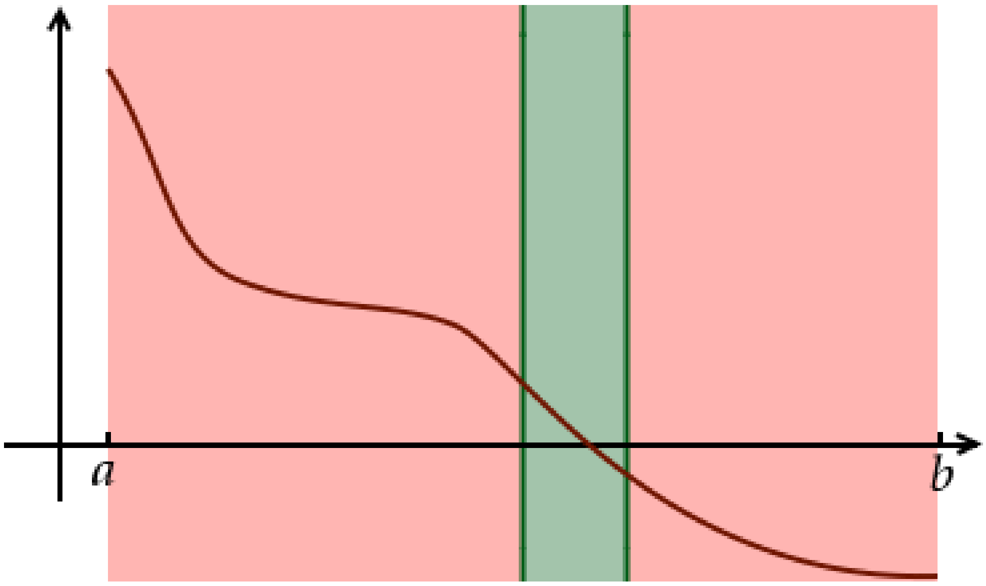
Dans notre exemple, nous sommes dans le premier cas de figure:



La zone dans laquelle notre zéro se trouve est donc divisée par deux. Il n'y a plus qu'à répéter le même processus avec le nouvel intervalle pour se rapprocher encore plus de notre zéro:



Et voici la troisième étape:



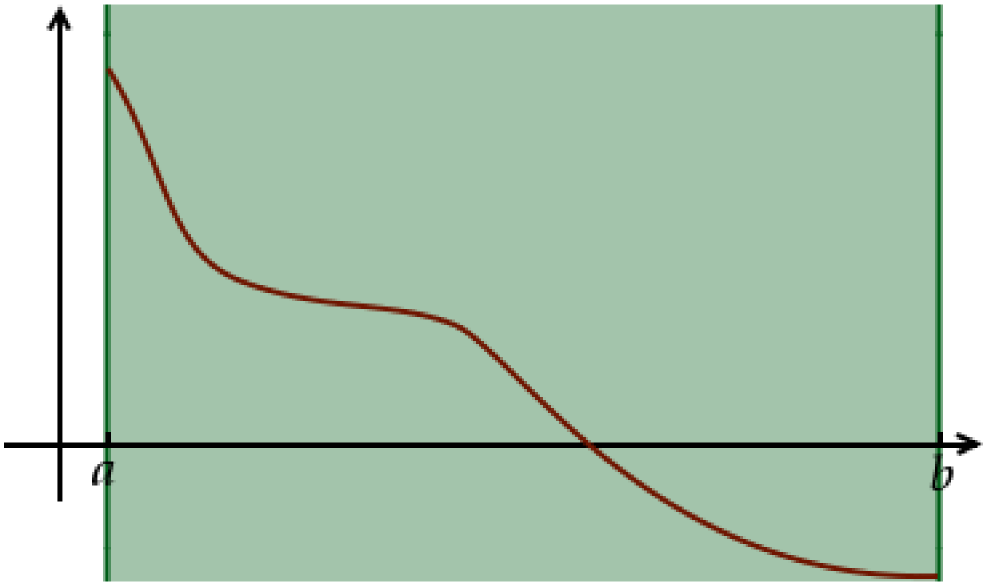
Et ainsi de suite, à chaque étape on coupe notre intervalle en deux et on garde celui des deux aux bornes duquel la fonction prend des valeurs de signes opposés.

> ? Et quand est-ce qu'on s'arrête?

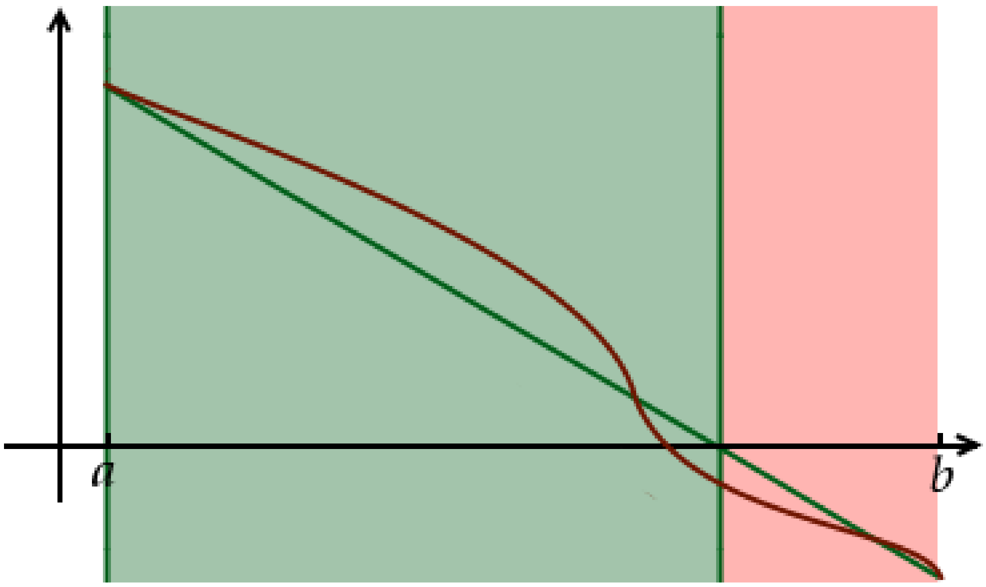
Tout dépend de la précision que vous souhaitez. Si par exemple vous voulez connaître la solution avec deux chiffres après la virgule, il faut recommencer jusqu'à ce que l'intervalle soit plus petit que 0,01. Et si vous voulez 10 chiffres après la virgule, il faudra être plus persévérant et continuer jusqu'à ce que l'intervalle soit plus petit que 0,0000000001.

II.5.3. Méthode de la fausse position

La **méthode de la fausse position** ressemble beaucoup à la méthode dichotomique que nous venons de voir. Prenons un exemple pour comprendre son fonctionnement. Nous partons de la même façon d'une fonction monotone sur un intervalle qui s'annule à un endroit que nous cherchons.



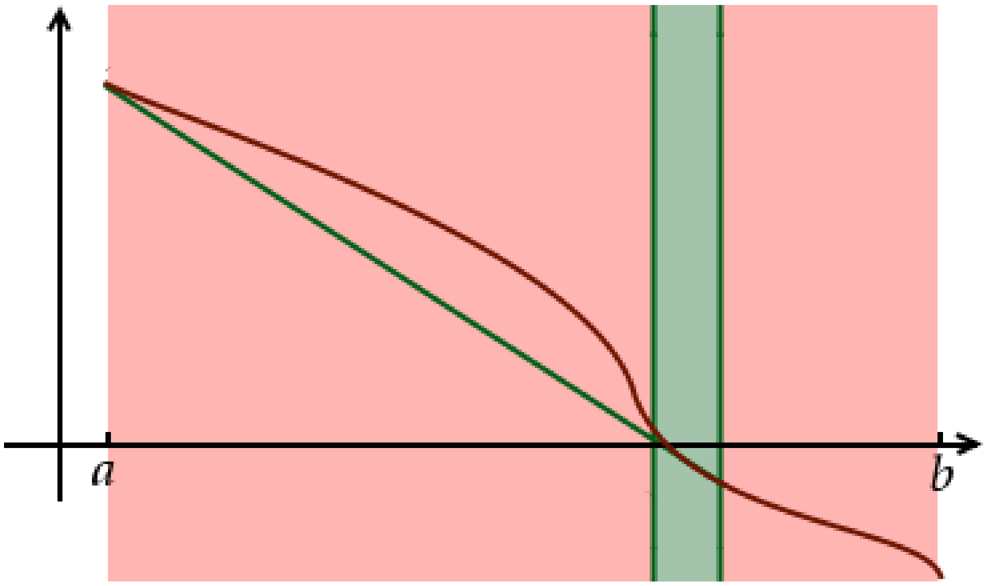
Mais au lieu de couper notre intervalle en deux parts égales, nous allons tracer une ligne droite entre les deux points extrêmes de la fonction, et nous allons effectuer le découpage à l'endroit où cette droite passe par 0.



Comme pour la méthode dichotomique, on élimine alors le morceau qui ne nous intéresse pas en regardant la valeur de la fonction au point de coupage.

En fait, la méthode consiste à faire comme si la fonction allait en ligne droite. Si c'était le cas, alors cette construction nous donnerait la solution du premier coup, mais comme la fonction ne suit en général pas une droite, la position que l'on trouve est une «fausse position» de la solution, d'où le nom de la méthode. Cette méthode part du principe qu'avec cette construction, on a plus de chance de tomber proche de la racine que si on se contente simplement de prendre le point du milieu comme dans la méthode dichotomique.

Dans l'exemple ci-dessus, pas de chance, c'est le petit morceau qui s'en va. Pour l'instant, cette méthode semble moins efficace que la méthode par dichotomie. Mais regardons l'étape suivante:

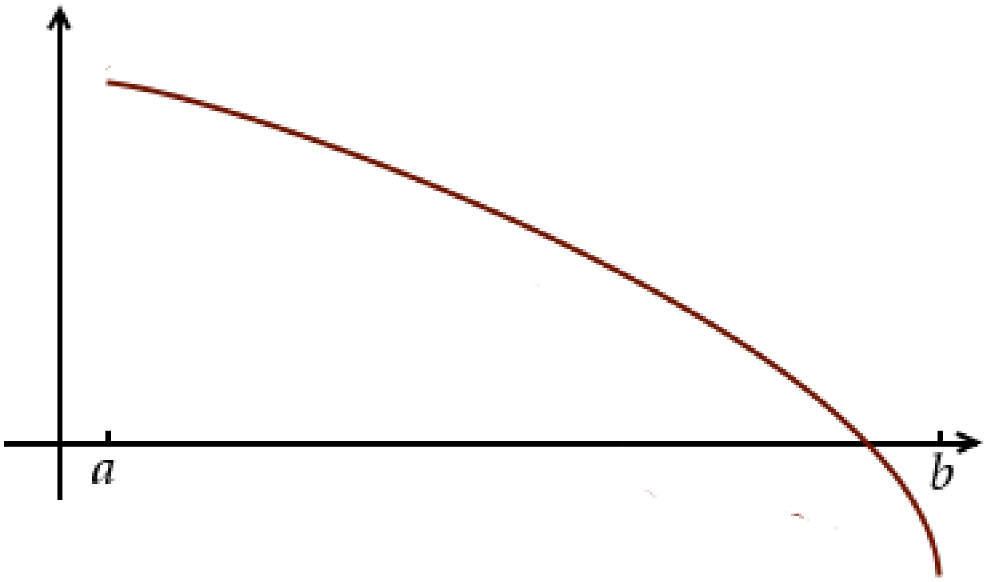


Cette fois-ci, on a enlevé un gros morceau et on s'est beaucoup rapproché de la solution. Il ne reste plus qu'à répéter le même processus autant de fois qu'on le souhaite pour se rapprocher de plus en plus de la solution.

Mais alors finalement, quelle est la meilleure méthode? La dichotomie ou la fausse position?

Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

Le principal problème de la méthode de la fausse position, c'est que la longueur de l'intervalle vert ne se rapproche pas forcément de zéro. En effet, il est fréquent qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, l'une des bornes de l'intervalle vert ne bouge plus et c'est l'autre borne qui se rapproche toute seule de la solution. Essayez par exemple la méthode avec une fonction de la forme suivante:



Vous allez voir que la borne de droite ne bouge jamais: seule la borne de gauche se rapproche de la solution. Cela rend les choses plus difficile pour savoir à quelle distance on se trouve de la solution. Si on veut avoir une précision de deux chiffres après la virgule, dans la méthode dichotomique, il suffit d'attendre que l'intervalle soit plus petit que 0,01, mais ici, il est possible que l'intervalle reste toujours plus grand que cette valeur.

Mais la méthode de la fausse position a tout de même un gros avantage sur la dichotomie, c'est que celle des deux bornes qui se rapproche de la solution s'en rapproche beaucoup plus vite! Autrement dit, il est possible d'avoir une précision bien plus grande en moins d'étapes.

En bref, avec la méthode de la fausse position on a une meilleure précision, mais il est plus difficile de savoir quelle est cette précision, tandis que la dichotomie donne une précision moindre, mais on sait exactement où on en est. 😊

> *i* Il existe tout de même des moyens de savoir à peu près à quelle distance de la solution on se trouve avec la méthode de la fausse position. Mais c'est plus complexe et moins direct.

Il existe de nombreuses autres méthodes permettant d'approcher numériquement les solutions d'une équation. On peut par exemple citer la méthode de la sécante ou la méthode de Newton. Trouver des méthodes qui s'approchent de plus en plus vite des solutions de nos équations est un défi pour les mathématiciens, les plus efficaces d'entre-elles peuvent être extrêmement complexes à élaborer et à étudier.

Troisième partie

Équations à plusieurs inconnues

III.1. Équations à deux inconnues

Introduction

Deux inconnues, cela veut dire que nous cherchons maintenant deux nombres. Voici un exemple en algèbre rhétorique:

> La somme de deux nombres est égale à 1000. Leur différence est égale à 500. Quels sont ces deux nombres?

En écriture algébrique, cela signifie que allons avoir besoin d'une deuxième lettre. Comme notre première inconnue s'appelait x, la seconde s'appellera y. Ainsi, la traduction algébrique de notre équation ci-dessus s'écrira de la façon suivante:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ x - y = 500 \end{cases}$$

En réalité, ceci se nomme un système d'équations, car comme vous le voyez, nous disposons de deux formules pour trouver nos deux inconnues. Nous reviendrons sur ceci plus en détail à la fin de ce chapitre.

III.1.1. Représentation des solutions

Une solution d'une équation à deux inconnues, c'est la donnée d'une valeur pour x et d'une valeur pour y. Prenons par exemple l'équation suivante:

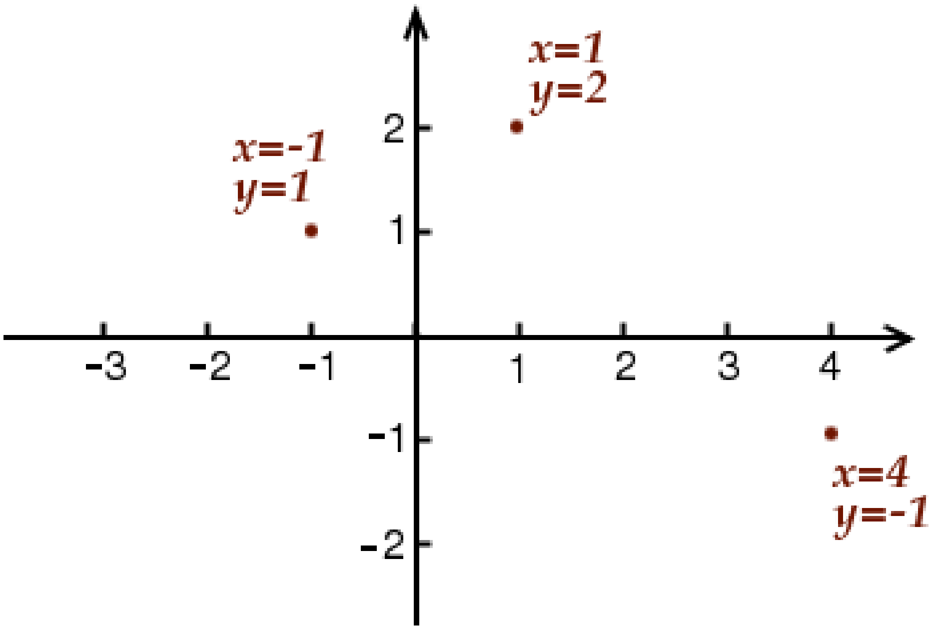
$$x^2 + 2y^2 = 3x + 6.$$

Si $x = 1$ et $y = 2$, cette égalité est bien vérifiée, en effet, on trouve 9 des deux côtés:

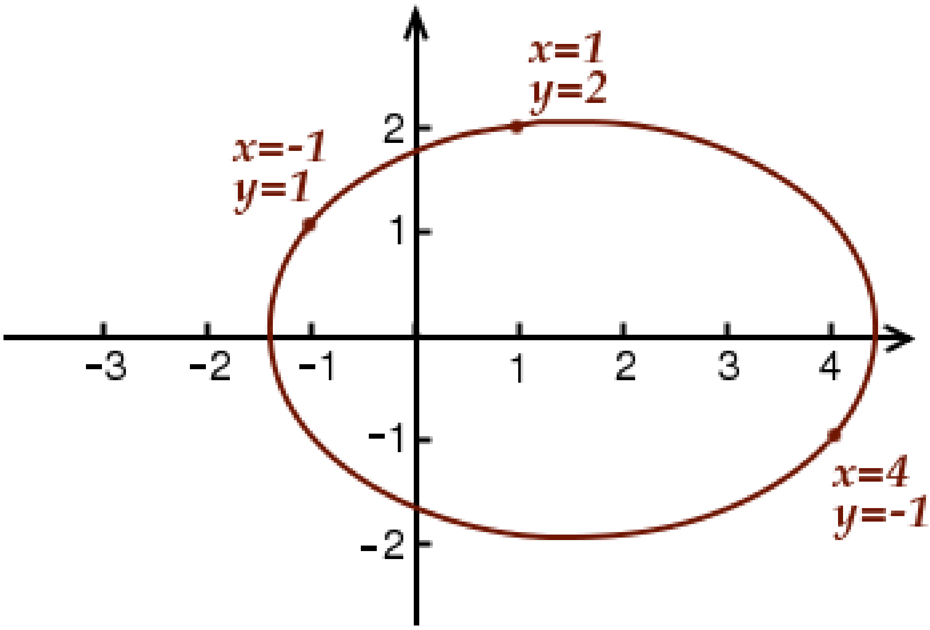
$$1^2 + 2 \times 2^2 = 3 \times 1 + 6.$$

Cependant, cette équation a de nombreuses autres solutions, par exemple $x = 4$ et $y = -1$, ou encore $x = -1$ et $y = 1$. Comme nous allons le voir dans la suite, le fait d'avoir deux inconnues offre beaucoup plus de liberté et on se retrouve souvent avec des équations ayant beaucoup de solutions

Pour pouvoir mieux s'y repérer il est assez pratique de représenter les solutions dans un repère dans lequel l'inconnue x est représenté sur l'axe horizontal et l'inconnue y sur l'axe vertical. Par exemple, les trois solutions que nous venons de voir se représentent ainsi:



Et on pourrait continuer à chercher d'autres solutions de notre équation pour les placer dans ce repère. On verrait alors apparaître peu à peu la figure suivante:



Grâce à cette représentation des solutions dans un repère, chaque équation donne une figure géométrique. Ce principe est tout bête, mais il est en réalité extrêmement utile car il rend l'étude des équations plus concrète. Une expression algébrique est souvent assez obscure et abstraite, surtout quand on débute, tandis qu'une figure géométrique, c'est visuel et ça rend tout de suite les choses beaucoup plus claires.

Dans notre exemple, on obtient une sorte de cercle aplati qui se nomme une ellipse. Nous verrons un peu plus bas pourquoi.

> Notez que cette correspondance marche aussi dans l'autre sens. Quand on fait de la géométrie, il est souvent très utile de chercher les équations des figures que l'on étudie cela

permet de mettre toute la puissance de l'algèbre au service des problèmes géométriques.

III.1.2. Méthodes de résolution

Pour résoudre les équations à deux inconnues, nous allons pourvoir réutiliser ce que nous savons sur les équations à une inconnue. Prenons par exemple l'équation suivante:

$$x \times y = 12.$$

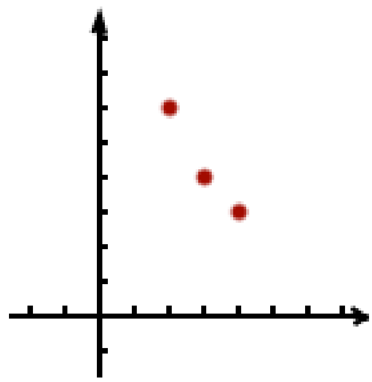
Autrement dit, on cherche deux nombres dont le produit est égal à 12. Pour trouver une solution on peut procéder de la façon suivante:

- on donne une valeur numérique quelconque à l'une des inconnues, x par exemple;
- notre équation ne contient plus qu'une inconnue, on sait donc la résoudre.

Ceci permet de trouver une solution, et pour en trouver d'autres, il suffit de répéter ce procédé en donnant une autre valeur à x. Voici par exemple trois solutions:

- Donnons à x la valeur 2, on tombe sur l'équation $2y = 12$ et on trouve la solution $y = 6$.
- Donnons à x la valeur 3, on tombe sur l'équation $3y = 12$ et on trouve la solution $y = 4$.
- Donnons à x la valeur 4, on trouve alors l'équation $4y = 12$ et on trouve la solution $y = 3$.

Voici comment se placent ces trois solutions dans un repère:



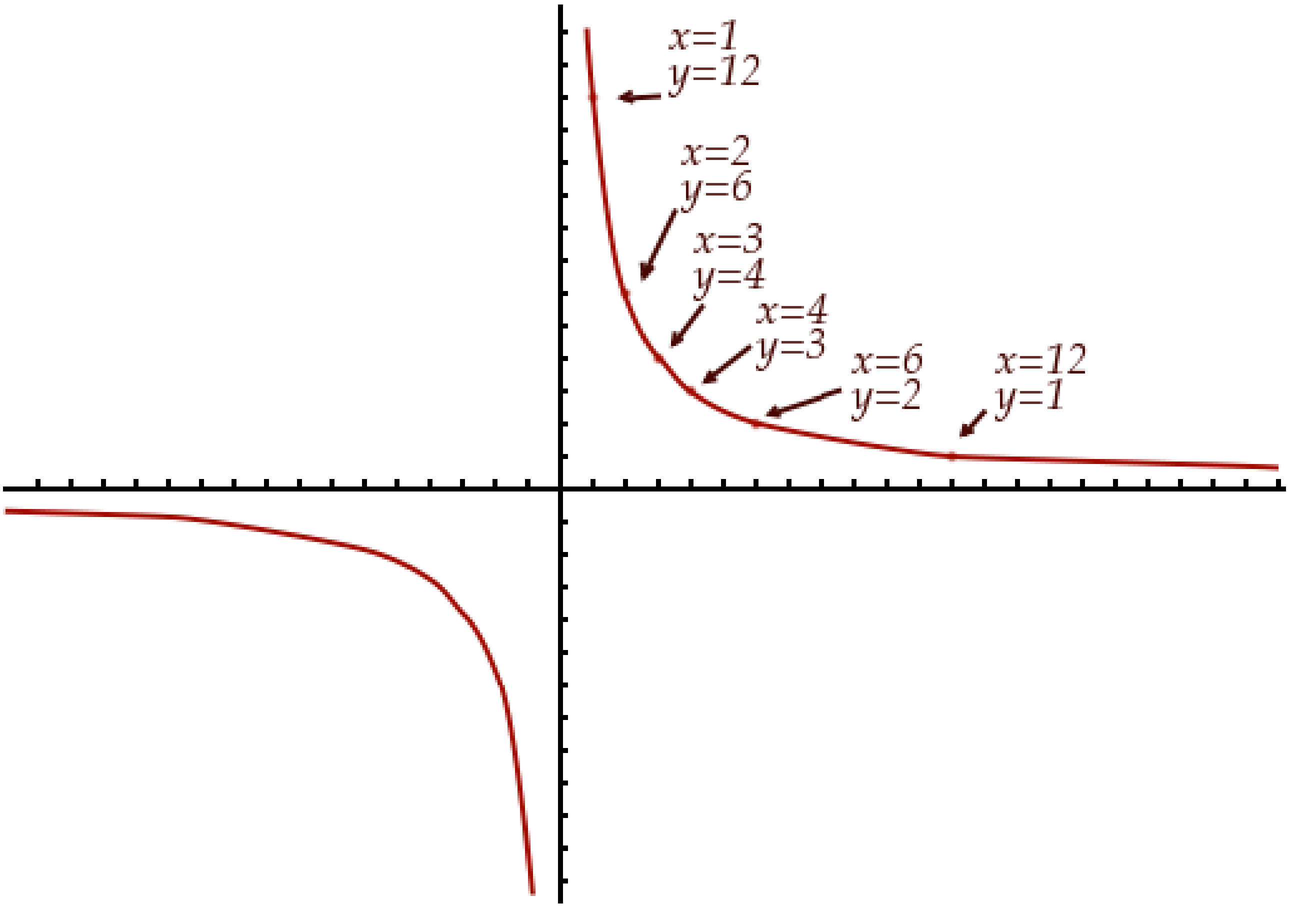
On pourrait continuer longtemps comme ça. Pour chaque valeur de x on trouve une valeur de y, ce qui permet d'obtenir des solutions à foison. Mais en réfléchissant un peu, on se rend compte qu'il n'est pas vraiment utile de donner des valeurs spécifiques à x. On peut se contenter de résoudre l'équation en ne regardant que l'inconnue y et en considérant x comme un nombre qu'on connait. De cette façon, on trouve tout simplement la solution:

$$y = \frac{12}{x}.$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de notre équation est composé des couples de nombres de la forme $(x, 12/x)$ avec x qui varie dans $\mathbb{R}^*$.

> Vous noterez que x varie dans $\mathbb{R}^*$, ce qui signifie que x ne peut pas prendre la valeur 0. En effet, dans ce cas, $12/x$ n'est pas défini, car on ne peut pas diviser par 0. Si on remplace x par 0 dans l'équation, on trouve $0 \times y = 12$ et cette équation n'a effectivement pas de solution puisque la multiplication $0 \times y$ est toujours égale à 0 et ne vaut donc jamais 12.

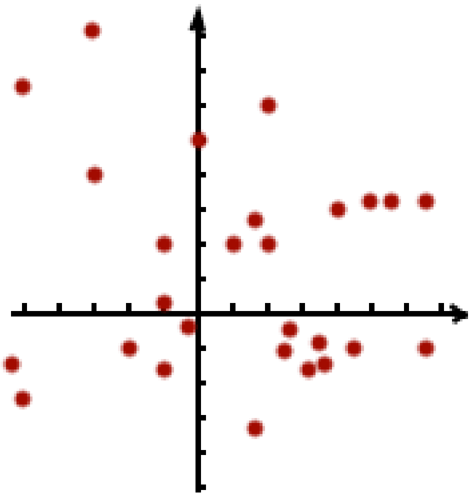
Au final, la figure géométrique qui correspond à notre équation est la suivante:



> Cette figure se nomme une hyperbole. Vous remarquerez que de cette façon, l'ensemble des points correspond au graphe de la fonction $f(x) = 12/x$.

III.1.2.1. La continuité

Il y a une chose qui peut surprendre dans ce que nous venons de voir, c'est de constater à quel point les solutions sont ordonnées. Après tout, on aurait pu s'attendre à ce qu'elles soient toutes dispersées de façon chaotique formant une sorte de nuage de points assez difficile à analyser.



Mais ce n'est pas le cas, on voit que nos solutions s'alignent parfaitement pour former des courbes continues.

Une courbe continue, c'est grosso-modo une figure que l'on peut tracer sur une feuille de papier sans lever le crayon. Dans le cas de l'ellipse que nous avons vu dans la section précédente, nous avons bien une courbe continue. Dans le cas de l'hyperbole, la figure formée par les solutions est composée de deux morceaux continus.

?

Cette propriété rend les solutions des équations bien plus agréables à visualiser! Mais pourquoi est-elle vraie? Toutes les équations donnent-elles toujours des figures continues?

Cela provient du fait que les transformations que l'on fait subir à nos inconnues sont elles mêmes continues.

Prenons un exemple pour comprendre ce que cela veut dire. Considérons la multiplication $3 \times 4 = 12$ qui fournit une solution à l'équation ci-dessus et changeons un tout petit peu ses nombres, remplaçons par exemple 3 par 3,0001 et 4 par 4,002. On trouve alors:

$$3,0001 \times 4,002 = 12,0064002.$$

On constate alors que le résultat est également très proche de 12. Et plus les nombres que l'on multiplie sont proches de 3 et de 4, plus leur produit sera proche de 12. C'est cette propriété que l'on appelle la continuité: une opération est continue si quand on effectue cette opération avec des nombres de plus en plus proches, alors les résultats sont eux-même de plus en plus proches.

Ceci explique pourquoi les figures sont continues: si on modifie un tout petit peu x, alors y ne change lui aussi qu'un tout petit peu. En clair les points se suivent les uns après les autres sans pouvoir faire de grands sauts d'un seul coup. Ils ne peuvent pas être dispersés mais sont obligés de former une ligne continue.

?

Mais pourtant dans le cas de l'hyperbole, on a une courbe en deux morceaux. Pourquoi n'a-t-on pas un seul morceau continue?

Parce qu'on utilise une division et que précisément la division n'est pas continue en 0. Regardez les deux divisions suivante:

$$\frac{1}{0,000001} = 1000000 \quad et \quad \frac{1}{-0,000001} = -1000000.$$

Vous voyez que les nombres utilisés pour ces deux divisions sont très proches (les dénominateurs sont tous deux très proches de 0) pourtant les deux résultats sont très éloignés. La division n'est pas continue en 0. Il est donc possible à cet endroit d'avoir une rupture de la courbe.

D'une manière générale, si pour résoudre une équation on utilise des opérations qui ne sont pas continues en certains nombres, alors pour chacun de ces nombres il peut y avoir une cassure de la continuité, ce qui donne un morceau supplémentaire dans la figure.

L'addition, la soustraction et la multiplication sont quant à elles parfaitement continues. La division est elle aussi continue partout en dehors de 0. En réalité, la plupart des opérations classiques sont continues. Vous pouvez donc vous rassurer, toutes nos figures géométriques représentant nos solutions sont en général faciles à visualiser.

III.1.3. Équations polynomiales

III.1.3.1. Les équations par degré

Comme pour les équations à une inconnue, les équations à deux inconnues ne faisant intervenir que les quatre opérations de base et les puissances sont appelées des **équations polynomiales**. Et de la même façon, elles peuvent être classées selon leur degré.

- S'il n'y a pas de puissance, alors on a une équation du premier degré. Par exemple: $2x + 1 = 7 - y$.
- S'il y a des carrés, alors on a une équation du second degré. Par exemple: $x^2 + 3y^2 = x + y + 1$.
- S'il y a des cubes, alors on a une équation du troisième degré. Par exemple $y^3 = x^2 + 5$.
- Et ainsi de suite pour les degrés suivants.

Il faut cependant faire attention à une subtilité quand les inconnues sont multipliées entre elles. Si par exemple, on a le terme xy dans notre équation, alors celle-ci est de degré 2, car xy est une multiplication de deux inconnues comme $x^2 = xx$ ou $y^2 = yy$. Pour connaître le degré, il faut donc considérer la multiplication faisant intervenir le plus d'inconnues, même si ce ne sont pas les mêmes. Ainsi, l'équation suivante:

$$x^3 + x^2y^3 + y - 5 = 0$$

est de degré 5 car il y a le terme x^2y^3.

III.1.3.2. Équations du premier degré

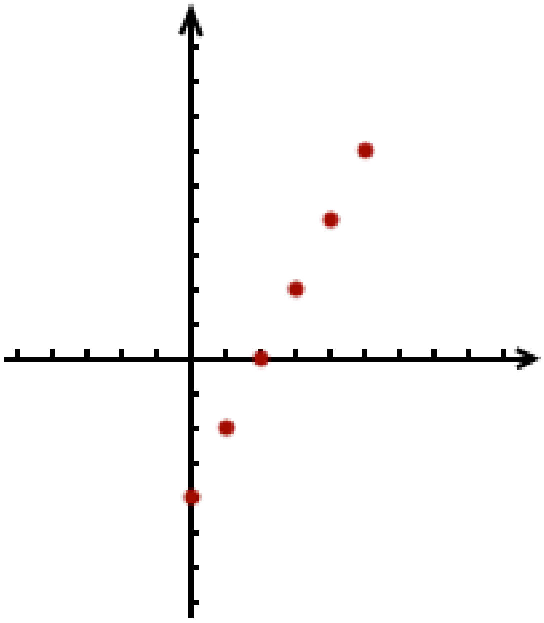
Passons maintenant à l'étude des équations du premier degré qui, comme vous vous en doutez, sont les plus simples à aborder. 🙂

Comme pour les équations à une inconnue, il est possible de les réduire par les techniques vues dans la partie précédente (passer tous les termes du même côté, développer, simplifier). Au final, une équation du premier degré à deux inconnues se présente sous la forme classique suivante:

$$ax + by + c = 0.$$

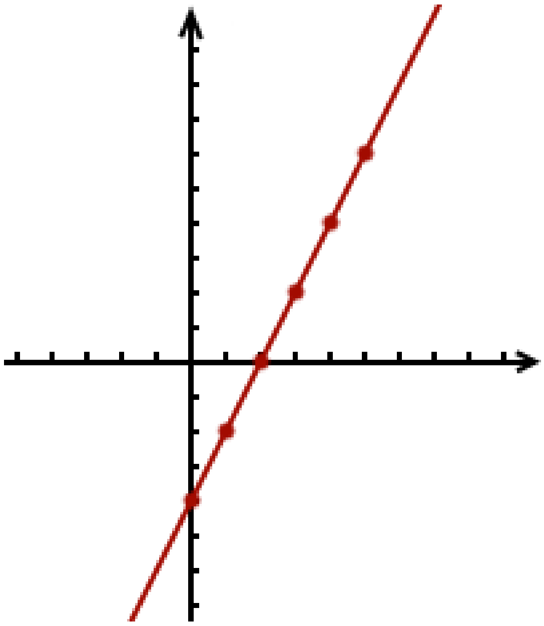
> ? La question qui nous brûle les lèvres est alors la suivante: à quelle figure géométrique cette équation correspond-elle?

Il est assez facile de faire une conjecture. Il suffit pour cela de prendre une équation du premier degré et de placer plusieurs solutions pour se faire une idée. Si par exemple on considère l'équation $y - 2x + 4 = 0$ alors en donnant à x les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4 et 5 on trouve les points suivants:



Alors? Quel est votre pronostique? 😋 Il n'est pas très difficile en voyant ces points de deviner que la figure va être une ligne droite. Et si vous doutez encore, vous pouvez essayer de placer d'autres points en choisissant d'autres valeurs de x, vous constaterez que vos nouveaux points seront toujours alignés avec les autres.

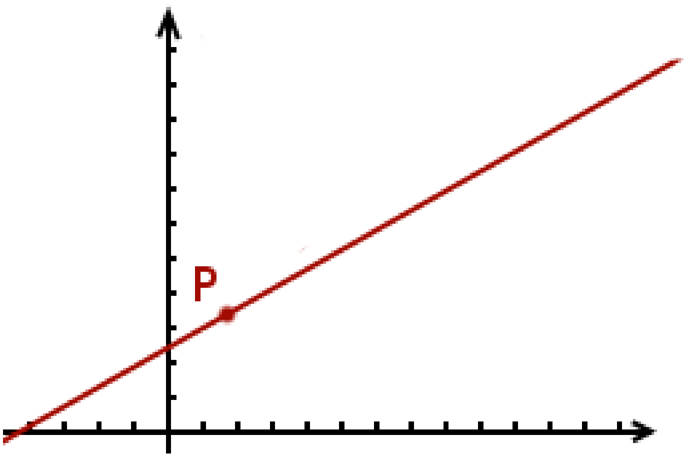
Au final, la figure semble être celle-ci:



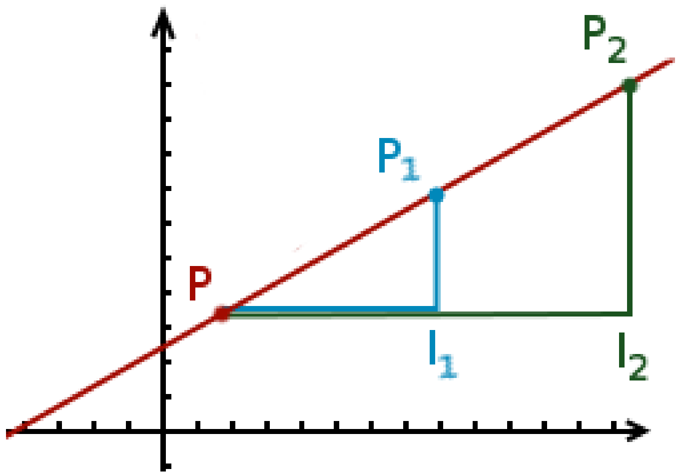
?

Mais comment expliquer ce phénomène? Est-ce un cas particulier ou bien toutes les équations du premier degré sans exception se représentent-elles par des droites?

Pour répondre à cette question, commençons par trouver une caractérisation des droites à partir des coordonnées de leurs points. Regardons la droite suivante sur laquelle nous avons placé un point P:



À partir de ce point, plaçons deux autres points P_1 et P_2 sur la droite et notons I_1 et I_2 les deux points suivants:



Ainsi on a:

- — PI_1 est le décalage horizontal entre P et P_1;
- — I_1P_1 est le décalage vertical entre P et P_1;
- — PI_2 est le décalage horizontal entre P et P_2;
- — I_2P_2 est le décalage vertical entre P et P_2.

Nous nous trouvons alors dans la configuration du théorème de Thalès! Les triangles PI_1P_1 et PI_2P_2 sont semblables et on a donc l'égalité suivante:

$$\frac{I_1P_1}{PI_1} = \frac{I_2P_2}{PI_2}.$$

Cette égalité peut se formuler de la façon suivante: sur une droite, le rapport entre le décalage vertical de deux points et leur décalage horizontal est constant. En d'autres termes, les décalages horizontaux et verticaux sont proportionnels!

Cette propriété caractérise les droites. Ainsi il suffit de montrer que les points qui représentent les solution de nos équations du premier degré vérifient cette propriété pour montrer qu'il correspondent bien à une droite.

Considérons donc deux solutions de notre équations et notons les (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On a donc:

$$ ax_1+by_1+c=0 ~~\text{et}~~ ax_2+by_2+c=0.$*Ledcalagehorizontalentrecesdeuxpointsestgal*$x_1 - x_2$ et leur décalage vertical à $y_1 - y_2$. Pour pouvoir comparer les deux, faisons la différence de nos deux équations ci-dessus:

$$(ax_1 + by_1 + c) - (ax_2 + by_2 + c) = 0 - 0.$$

On constate alors que le nombre c s'élimine et que l'on peut factoriser cette égalité de la façon suivante:

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à passer la différence $x_1 - x_2$ à droite de l'égalité et à diviser par b pour obtenir:

$$(y_1 - y_2) = -\frac{a}{b}(x_1 - x_2).$$

Et c'est gagné! Cette formule affirme précisément que $y_1 - y_2$ est proportionnel à $x_1 - x_2$ et le coefficient de proportionnalité est égal à $-a/b$.

> Ce coefficient s'appelle le coefficient directeur de la droite et peut s'interpréter comme la pente de celle-ci. S'il est égal à 0 la droite est horizontale, s'il est positif la droite monte et s'il est négatif la droite descend. Notez que si $b = 0$ ce coefficient n'est pas défini, ce qui correspond au cas où la droite est verticale: sa pente est infinie!

L'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues est donc toujours une droite! C'est un joli résultat, vous ne trouvez pas? 🙂

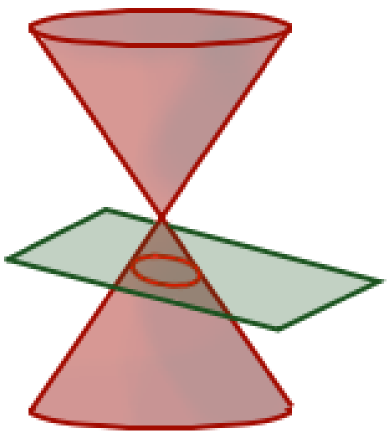
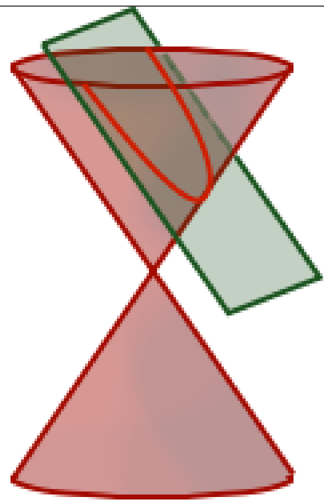
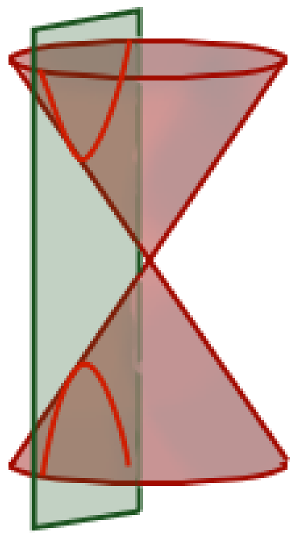
III.1.3.3. Équations du second degré

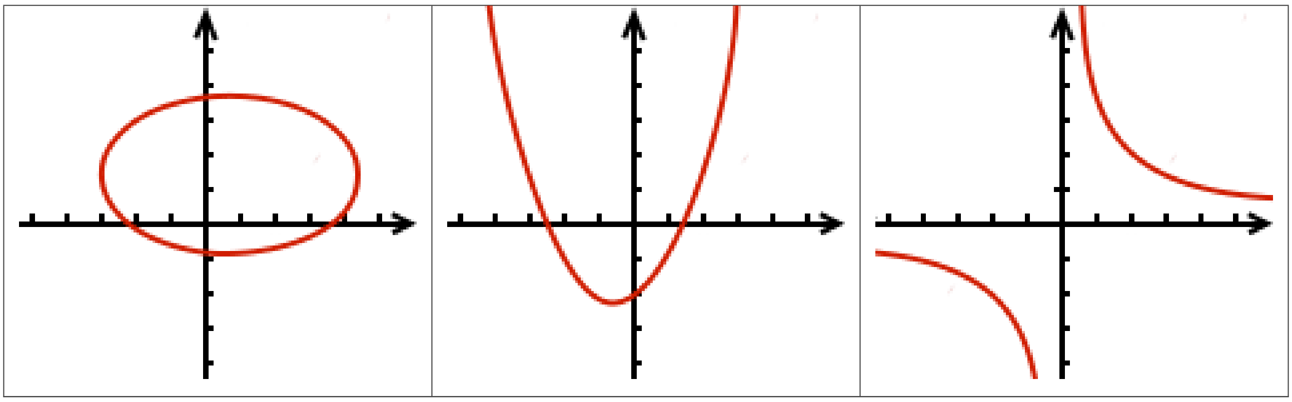
Après le premier degré vient le second. Une équation du second degré à deux inconnues s'écrit de la façon suivante:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Ça fait peur, hein? 😋 Rassurez-vous, nous n'allons pas entrer dans le détail de ces équations. Sachez simplement que les figures géométriques que l'on obtient s'appellent les **coniques**. Nous en avons déjà vu deux exemples au début de ce chapitre: l'ellipse et l'hyperbole.

Le nom des coniques vient du fait que ces figures correspondent à l'intersection entre un plan et un cône. Il existe trois types de coniques: les ellipses, les paraboles et les hyperboles. Les ellipses sont des figures finies, tandis que les paraboles et hyperboles ont toutes deux des branches qui partent à l'infini.

Ellipse	Parabole	Hyperbole
		



L'étude de ces équations du second degré est assez longue et nécessite de distinguer de nombreux cas de figure différents, mais dans le fond, les méthodes utilisées sont semblables à celles utilisées pour la résolution des équations du second degré à une seule inconnue. Si vous voulez en savoir plus n'hésitez pas à consulter un cours sur le sujet.

III.1.4. Système d'équations

Un **système d'équation**, c'est la donnée de plusieurs équations que l'on doit résoudre simultanément. Au début du chapitre, nous avons vu l'exemple suivant:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ x - y = 500 \end{cases}$$

Ce qui signifie que l'on cherche deux nombres dont la somme vaut 1000 et la différence 500. Il ne suffit pas que l'une des deux soit vérifiée, on veut deux nombres qui satisfont les deux à la fois.

Vous aurez constaté de vous-même que l'on note un système en regroupant ses équations à l'aide d'une accolade à gauche.

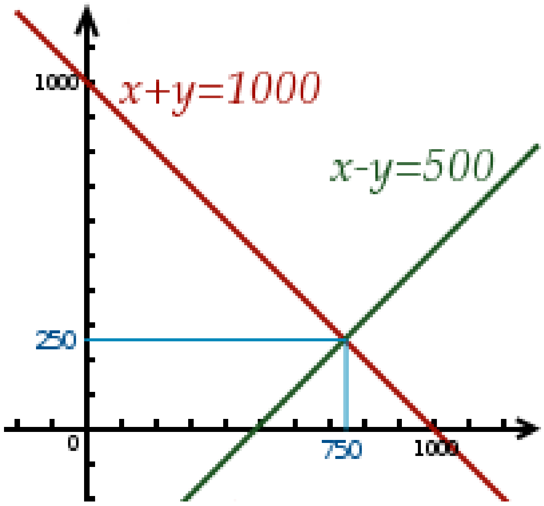
Nous avons vu que les solutions d'une équation à deux inconnues sont représentées par une courbe, ce qui signifie que la plupart du temps il y a une infinité de solutions. Le fait de rajouter une deuxième équation donne une seconde contrainte qui permet de limiter les solutions.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la plupart du temps, quand on étudie des équations avec plusieurs inconnues, il faut considérer un système comportant autant d'équations que d'inconnues pour n'avoir qu'un nombre fini de solutions. Ainsi, quand on étudie des problèmes à deux inconnues, ils est fréquent d'avoir deux équations.

III.1.4.1. Équations du premier degré

Nous avons vu qu'une équation du premier degré se représente par une droite. Ainsi, si on dispose d'un système de deux équations de degré 1, cela nous donne deux droites et la solution recherchée se trouve à l'intersection.

Regardons ce que cela donne pour l'exemple ci-dessus:



Les nombres qui vérifient $x + y = 1000$ se trouvent sur la droite rouge et ceux qui vérifient $x - y = 500$, sont sur la droite verte. Le seul point qui se trouve à la fois sur la rouge et la verte est celui de coordonnées $(750, 250)$. Notre système a donc une unique solution:

$$x = 750 \quad et \quad y = 250.$$

Deux droites quelconques ont presque toujours un et un seul point d'intersection, sauf si elles sont parallèles. Dans ce cas, le système n'a pas de solution.

En fait, le cas où les droites sont parallèles se présente quand les deux équations sont dépendantes l'une de l'autre par exemple dans le cas suivant:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

Il est évident que ce système n'a pas de solution car $2x - 3y$ ne peut pas être égal à la fois à 7 et à 2.

Pour que les droites ne soient pas parallèles, il faut que leurs coefficients directeurs ne soient pas les mêmes, autrement dit que le rapport a/b ne soit pas le même dans les deux équations, sinon on tombe sur un cas impossible comme ci-dessus.

III.1.4.2. Méthode de résolution

Il existe plusieurs façons de résoudre un système d'équation, mais la plus générale qui marche quasiment à tous les coups est la suivante:

- On résout la première équation avec l'inconnue y en considérant x comme un nombre, comme nous l'avons déjà vu au début du chapitre.
- Une fois qu'on a trouvé la valeur de y en fonction de x, on prend la deuxième équation et on remplace toutes les occurrences de y par l'expression que l'on vient de trouver.
- On tombe alors sur une équation à une seule inconnue: x. Il n'y a plus qu'à résoudre celle-ci pour trouver x, puis à déduire y à partir de la valeur de x.

Ça a l'air compliqué comme ça, mais vous allez voir qu'avec un exemple tout va s'éclairer.
Reprenons notre système préféré:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ x - y = 500 \end{cases}$$

On commence à résoudre la première équation pour trouver y. C'est facile, il suffit de passer le x de l'autre côté:

$$y = 1000 - x.$$

On remplace tous les y de la deuxième équation par $1000 - x$. Ici il n'y en a qu'un:

$$x - (1000 - x) = 500.$$

Nous avons maintenant une simple équation du premier degré à une inconnue que nous savons résoudre:

$$\begin{aligned} x - (1000 - x) = 500 \; &\Leftrightarrow x - 1000 + x = 500 \\ &\Leftrightarrow 2x = 500 + 1000 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1500}{2} = 750. \end{aligned}$$

Et le y se déduit immédiatement:

$$y = 1000 - x = 1000 - 750 = 250.$$

Heureusement, nous trouvons la même solution par cette méthode qu'avec l'intersection des droites sur le graphique: $x = 750$ et $y = 250$. Ouf!

Si vous avez compris le principe, il ne vous reste plus qu'une chose à faire: résoudre des équations, résoudre des équations, encore résoudre des équations, toujours résoudre des équations! Apprendre les méthodes est une chose utile pour débuter et comprendre ce qu'il faut faire, mais seule la pratique vous permettra de vraiment pouvoir prétendre maîtriser le sujet et ses nombreuses subtilités.

III.2. De plus en plus d'inconnues

Introduction

Il n'y a aucune raison de nous arrêter en si bon chemin. Nous avons commencé avec une inconnue, puis deux, alors pourquoi pas trois, quatre, cinq ou six?

Dans ce chapitre, nous allons voir les principes généraux qui permettent de trouver les solutions d'équations à plusieurs inconnues. Mais si les méthodes de résolution sont intéressantes, il devient souvent très long et fastidieux d'entrer dans les calculs à mesure que le nombre d'inconnues augmente. Heureusement, nous avons aujourd'hui des ordinateurs capables de faire ces calculs à notre place.

III.2.1. Représentation des solutions

III.2.1.1. Les inconnues

Si on augmente le nombre d'inconnues, il faut également augmenter le nombre de lettres pour les désigner.

Si on a trois inconnues, le choix reste simple: x, y et z. Mais dès lors que l'on arrive à quatre inconnues ou plus, il n'y a pas moyen de poursuivre l'alphabet. On pourrait tout à fait décider de revenir en arrière et prendre des lettres comme w, v ou u pour les quatrième, cinquième et sixième inconnues, mais cette méthode ne marcherait plus si on dépassait la vingt-sixième. En fait, la façon la plus courante de noter les inconnues dès qu'elles sont au moins quatre consiste à utiliser la lettre x avec des indices. Ainsi, si on a cinq inconnues, on les notera de la façon suivante:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5.$$

Voici par exemple une équation du second degré à cinq inconnues:

$$2x_1^2 + 3x_2x_4 - x_5^2 + 7x_3 - 3x_4 - 17 = 0.$$

III.2.1.2. Dans d'autres dimensions

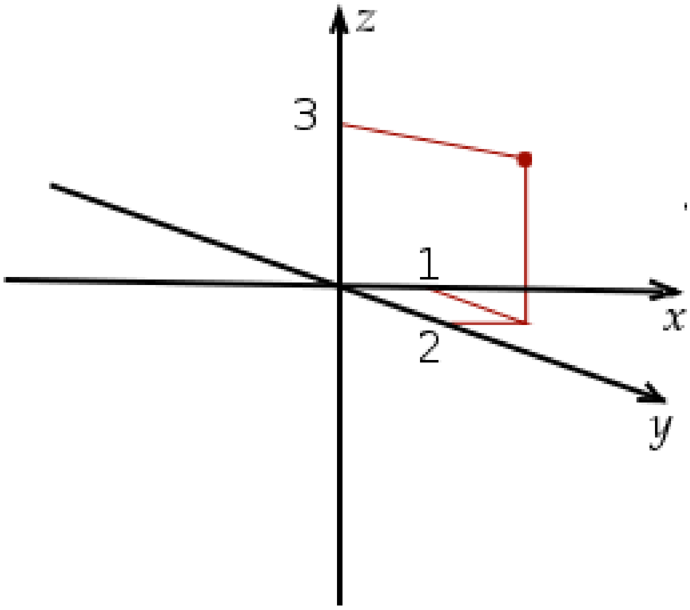
III.2.1.2.1. En 3D

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les solutions d'une équation à deux inconnues peuvent se représenter dans un plan. En utilisant le même procédé, il est possible de représenter les solution d'une équation à trois inconnues dans l'espace en trois dimensions.

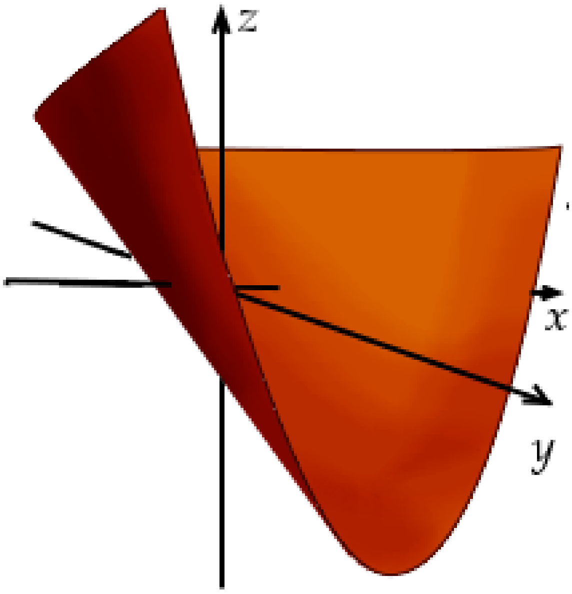
Regardons par exemple l'équation suivante:

$$x^2 + 4y - 3z = 0.$$

On peut constater que les valeurs $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$ sont une solution de cette équation. Cette solution peut être représentée dans l'espace par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$:



Et si on continuait à chercher les solutions de cette équation pour les placer toutes dans le repère, on verrait peu à peu se dessiner la figure suivante:



C'est beau, n'est-ce pas? Cette figure porte le doux nom de cylindre parabolique.

Seul un petit morceau de la figure est représenté dans l'image ci-dessus. Le cylindre parabolique entier se prolonge à l'infini.

III.2.1.2.2. Et au delà

Si vous avez compris le principe vous devez vous douter de ce qui suit: les solutions d'une équation à quatre inconnues peuvent se représenter dans un espace en quatre dimensions. Et d'une manière générale, s'il y a n inconnues, les solutions se représentent dans un espace à n dimensions.

Quoi? Quoi? Quoi? Qu'est-ce que c'est que ça, la quatrième dimension? Il est possible d'aller au dessus de trois dimensions?

En mathématiques, oui! Au delà de la dimension trois, les espaces ne peuvent plus être représentés facilement car notre monde physique est en 3D, mais rien n'empêche de les considérer de façon abstraite. Un espace de dimension 4 est un espace dans lequel chaque point est repéré par 4 coordonnées, tout simplement.

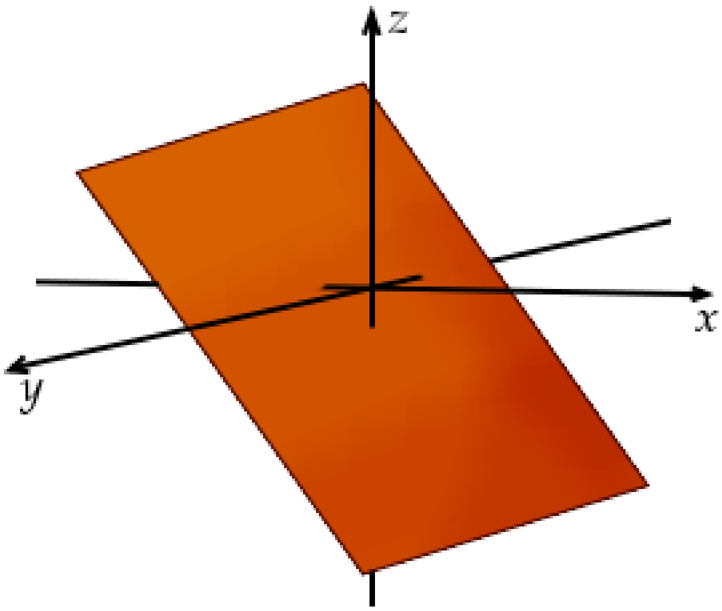
III.2.2. Équations du premier degré

III.2.2.1. Trois inconnues

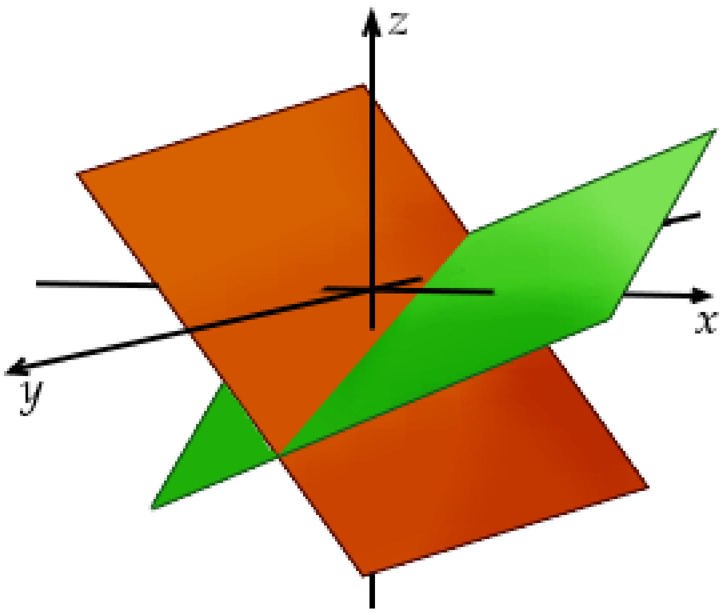
En dimension 3, une équation du premier degré s'écrit de la façon suivante:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

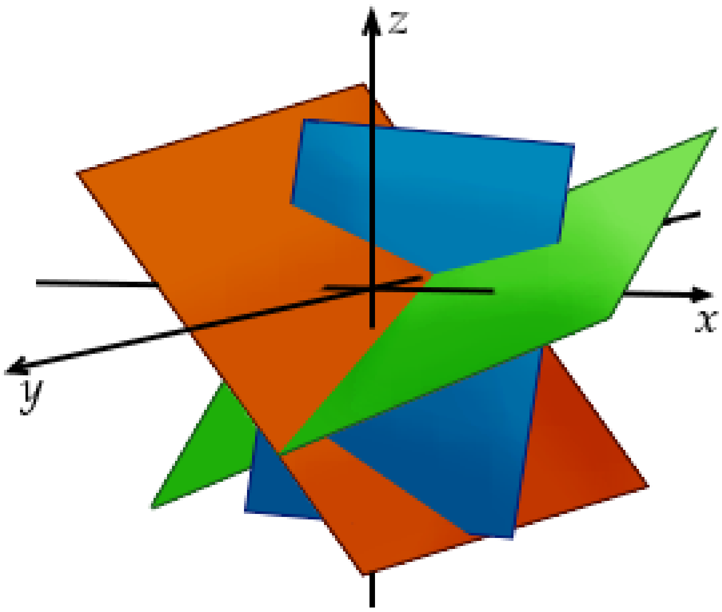
Et de la même façon que les équations à deux inconnues se représentent par une droite, celles à trois inconnues se représentent par un plan.



Si on considère un système de deux équations, alors les solutions se trouvent à l'intersection de deux plans. Or l'intersection de deux plans quelconques, c'est une droite.



Et si on ajoute une nouvelle équation pour avoir un système de trois équations à trois inconnues, alors on cherche l'intersection de trois plans. Cette fois, il n'y a plus qu'un point, c'est-à-dire une unique solution.



> **!** Ce que nous venons de dire n'est vrai que si les trois plans sont disposés de manière quelconque dans l'espace. Il existe des cas particuliers, comme par exemple si deux plans sont parallèles, où il n'y a aucune solution car deux plans parallèles n'ont pas d'intersection.

Un autre cas particulier que l'on peut rencontrer est par exemple celui de ce système:

$$\begin{cases} 10x + 10y + 10z + 10 = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 6 = 0 \\ 13x + 14y + 15z + 16 = 0 \end{cases}$$

Ce qu'il faut remarquer ici, c'est que la troisième équation est la somme des deux premières. Ainsi, si les deux premières équations sont vérifiées, alors la troisième le sera automatiquement. Cette dernière n'apporte donc aucune information supplémentaire sur les inconnues et du coup, c'est un peu comme si nous n'avions que deux équations.

Géométriquement, cela se traduit par le fait que les trois plans passent tous par la même droite. Ainsi, l'ensemble des solutions est une droite.

III.2.2.2. À plus de quatre

À partir de quatre, comme les inconnues sont numérotées par un indice, nous allons faire la même chose avec leurs coefficients. Ainsi une équation du premier degré à cinq inconnues se notera de la façon suivante:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0.$$

Et d'une manière générale, en voici une avec un nombre n quelconque d'inconnues:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0.$$

Si vous connaissez l'utilisation du signe Σ pour les sommes, cette équation peut s'écrire ainsi:

$$\Sigma_{k=1}^{n} a_kx_k = 0.$$

La règle est alors la suivante:

> Dans un espace de dimension n, l'ensemble des solutions d'une équation de premier degré à n inconnues est un espace de dimension $n-1$.

Remarquez que cela marche bien pour les trois premières dimensions que nous avons vues:

- Si $n = 1$, il y a une inconnue et une seule solution qui se représente par un point (dimension 0).
- Si $n = 1$, il y a deux inconnues et les solutions forment une droite (dimension 1).
- Si $n = 2$, il y a trois inconnues et les solutions forment un plan (dimension 2).

Dans un espace quelconque, un espace ayant juste une dimension de moins s'appelle un **hyperplan**. Ainsi, en dimension 1 un hyperplan est un point, en dimension 2 c'est une droite et en dimension 3 c'est un plan.

Les choses fonctionnent alors exactement de la même façon que pour la dimension 3:

- si on a une seule équation, alors les solutions sont représentées par un hyperplan, c'est-à-dire de dimension $n-1$;
- si on a un système de deux équations, alors l'intersection de deux hyperplans donne un espace de dimension $n-2$;
- si on a un système de trois équations, alors l'intersection de trois hyperplans donne un espace de dimension $n-3$;
- si on a un système de quatre équations, alors l'intersection de quatre hyperplans donne un espace de dimension $n-4$…

Et ainsi de suite. À chaque fois qu'on ajoute une équation, on ajoute une contrainte supplémentaire sur les solutions ce qui leur fait perdre une dimension.

Par exemple, si on étudie un système de 300 équations à 1000 inconnues, alors l'ensemble des solutions sera un espace de dimension 700! S'il y a 999 équations pour 1000 inconnues, on a une droite. Et pour qu'il n'y ait qu'une solution, il faut qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues.

Attention, ces règles sont vraies quand il n'y a pas de cas particuliers comme ceux que nous avons déjà vus: hyperplans parallèles qui n'ont pas d'intersection ou encore équations qui ne sont pas indépendantes les unes des autres. Il existe des méthodes d'algèbre linéaire permettant de détecter ces cas particuliers quand ils se présentent, mais nous ne les verrons pas car elles sont un peu trop compliquées pour le niveau de ce cours.

III.2.3. Méthodes de résolution

Bon, il y a bien un moment où il faut mettre les mains dans le cambouis, c'est-à-dire apprendre concrètement à faire les calculs: c'est maintenant. Dans cette section, nous allons voir deux méthodes de résolution des systèmes d'équations. Pour les expliquer, nous allons prendre pour exemple le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & -y & +5z & & = 0 \\ x & +y & +4z & +3 & = 0 \\ 2x & +2y & +11z & -6 & = 0 \end{array}\right.$$

> Il s'agit d'un système du premier degré à trois inconnues. Vous allez voir que les méthodes que nous allons utiliser peuvent également s'appliquer s'il y a plus d'inconnues ou quand les équations ne sont pas du premier degré. Mais bien entendu, plus on complique, plus les calculs sont longs et pénibles. Ce système va déjà nous donner un peu de fil à retordre.

III.2.3.1. Par substitution

Nous allons commencer par prendre la première équation et la résoudre avec l'inconnue x comme si y et z étaient des nombres connus. C'est assez facile, on trouve ceci:

$$x = y - 5z.$$

Maintenant que nous avons cette valeur de x en fonction de y et z, nous allons la substituer dans les deux autres équations (d'où le nom de la méthode). On trouve ceci:

$$\left\{\begin{array}{lllll} (y-5z) & +y & +4z & +3 & = 0 \\ 2(y-5z) & +2y & +11z & -6 & = 0 \end{array}\right.$$

Ce qui se simplifie en regroupant les y et les z de la façon suivante:

$$\left\{\begin{array}{llll} 2y & -z & +3 & = 0 \\ 4y & +z & -6 & = 0 \end{array}\right.$$

À ce stade, nous sommes passé d'un système de trois équations à trois inconnues à un système de deux équations à deux inconnues. On peut maintenant répéter le processus avec y pour éliminer une nouvelle inconnue. La première équation de notre nouveau système nous donne:

$$y = \frac{z-3}{2}.$$

On reporte ça dans la dernière équation et on trouve:

$$4\frac{z-3}{2} + z-6 = 0.$$

Nous n'avons désormais plus qu'une inconnue, donc nous savons comment faire:

$$4\frac{z-3}{2} + z-6 = 0 \Leftrightarrow 2z-6+z-6 = 0 \Leftrightarrow 3z-12 = 0 \Leftrightarrow 3z = 12 \Leftrightarrow z = 12 \div 3 = 4.$$

Nous venons de trouver $z = 4$, il suffit maintenant de remonter tout ça pour retrouver y et x:

$$y = \frac{z-3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2},$$

et

$$x = y-5z = \frac{1}{2}-5 \times 4 = \frac{1-40}{2} = -\frac{39}{2}.$$

Au bout du compte, nous trouvons qu'il n'y a bien qu'une seule solution qui est la suivante:

$$\begin{cases} x = -19,5 \\ y = 0,5 \\ z = 4. \end{cases}$$

Ce n'était pas si dur que ça finalement. 😉

III.2.3.2. Par élimination

La méthode par élimination est assez proche de la précédente, mais elle se présente un peu différemment. Elle est basée sur le principe suivant: on ne change pas les solutions d'un système d'équations si on ajoute ou soustrait une des équations du système à une autre.

Pour bien comprendre, reprenons notre système de départ.

$$\begin{cases} x & -y & +5z & & = 0 \\ x & +y & +4z & +3 & = 0 \\ 2x & +2y & +11z & -6 & = 0 \end{cases}$$

Alors, il est possible par exemple de soustraire la première équation à la deuxième. On trouve ceci:

$$\begin{cases} x & -y & +5z & & = 0 \\ & 2y & -z & +3 & = 0 \\ 2x & +2y & +11z & -6 & = 0 \end{cases}$$

Bien sûr, le système n'est plus le même puisque la deuxième équation a été modifiée, mais ce qui compte, c'est que ses solutions sont toujours les mêmes.

Ce procédé peut être un peu subtil à comprendre la première fois qu'on le voit. Puisque les solutions que nous cherchons doivent vérifier la première équation, cela signifie que nous avons ajouté 0 à la deuxième équation! En définitive, nous avons bien changé les solutions de la deuxième équation, mais nous n'avons pas changé les solutions qui vérifient à la fois la première et la deuxième équation. Notre nouveau système a donc les mêmes solutions que le système de départ.

Cette manipulation simplifie la solution, car vous aurez constaté qu'au passage, nous avons éliminé l'inconnue x de la deuxième équation (d'où le nom de la méthode par élimination).

Il ne nous reste plus qu'à continuer. Pour éliminer les x de la troisième équation, nous allons lui soustraire deux fois la première. On trouve alors ceci:

$$\begin{cases} x & -y & +5z & & = 0 \\ & 2y & -z & +3 & = 0 \\ & 4y & +z & -6 & = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant éliminer le y de la troisième ligne en lui retranchant deux fois la deuxième:

$$\begin{cases} x & -y & +5z & & = 0 \\ & 2y & -z & +3 & = 0 \\ & & 3z & -12 & = 0 \end{cases}$$

Ça simplifie pas mal les choses, vous ne trouvez pas? Maintenant regardez la troisième équation: il n'y a plus que l'inconnue z, nous savons donc la résoudre et nous trouvons:

$$z = 12 \div 3 = 4.$$

Maintenant, nous pouvons remplacer z par sa valeur dans les deux autres équations:

$$\begin{cases} x & -y & +20 & = 0 \\ & 2y & -1 & = 0 \\ & & z & = 4 \end{cases}$$

Et nous pouvons maintenant résoudre la deuxième équation. On trouve $y = 1/2$ et on peut reporter ce résultat dans la première équation qui à son tour n'a plus qu'une inconnue:

$$\begin{cases} x & -\frac{1}{2} & +20 & = 0 \\ & & y & = \frac{1}{2} \\ & & z & = 4 \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à achever la première équation:

$$\begin{cases} x & = -\frac{39}{2} \\ y & = \frac{1}{2} \\ z & = 4 \end{cases}$$

Et c'est gagné! On trouve bien heureusement la même solution qu'avec la méthode de substitution. Vous voyez que finalement, une fois que l'on a éliminé suffisamment d'inconnues dans plusieurs équations, toutes les équations tombent les unes après les autres comme des dominos.

Quand on l'applique à un système du premier degré, cette méthode s'appelle également la méthode d'élimination de Gauss-Jordan ou méthode du pivot de Gauss.

Quatrième partie

Annexes

IV.1. Inéquations

Introduction

Si une équation, au lieu de donner une égalité, nous donne une inégalité, alors on appelle cela une **inéquation**. En voici un exemple:

> Trouver un nombre dont le carré est plus petit que le triple.

Ce qui en langage algébrique se traduit de la façon suivante:

$$x^2 < 3x.$$

À quelques adaptations près, la plupart des techniques que nous avons vues pour les équations fonctionnent également pour les inéquations. Nous allons voir dans cette annexe comment les aborder.

IV.1.1. Plus grand ou plus petit

IV.1.1.1. Les quatre inégalités

Il existe quatre types d'inégalités, classées selon deux critères:

— **Infériorité ou supériorité**: indique si le nombre qui est à gauche de l'inégalité est inférieur ou supérieur à celui de droite.
— **Large ou stricte**: indique si le cas d'égalité est compté ou pas. Au sens large, un nombre est considéré comme inférieur (ou supérieur) à lui-même, au sens strict, ce n'est pas le cas. Voici un tableau qui résume ces quatre possibilités:

	Infériorité	**Supériorité**
Stricte	$1 < 3$	$3 > 1$
Large	$1 \leq 3$ ou $2 \leq 2$	$3 \geq 1$ ou $2 \geq 2$

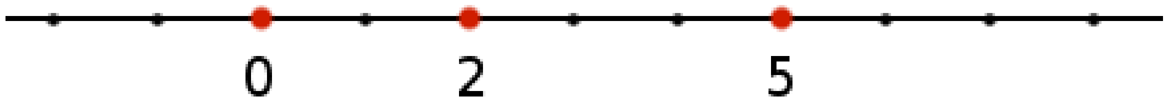
! La nuance entre inégalité large ou stricte fait qu'une phrase telle que «x est inférieur à y» est ambiguë. Pour éviter toute confusion, il faut mieux préciser à chaque fois: «x est inférieur ou égal à y» ou «x est strictement inférieur à y».

IV.1.1.2. Trouver les zones

Contrairement aux équations dont les solutions sont souvent quelques nombres isolés, les inéquations ont la plupart du temps des intervalles entiers de solutions. Prenons par exemple l'équation suivante:

$$x(x-2)(x-5) = 0.$$

Il s'agit d'une équation polynomiale sous sa forme factorisée, il est donc facile d'identifier ses solutions: 0, 2 et 5. Celles-ci peuvent se représenter comme ceci sur la droite réelle:



Ces trois solutions délimitent quatre zones sur lesquelles l'expression $x(x-2)(x-5)$ est positive ou négative. Prenons par exemple, l'intervalle compris entre 0 et 2, si on teste par exemple avec le nombre 1, on trouve:

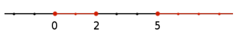
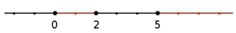
$$1\times(1-2)\times(1-5) = 1\times(-1)\times(-4) = 4.$$

Ce test permet de dire qu'entre 0 et 2, l'expression est positive. En testant de même pour les trois autres zones, on constate que le résultat est également positif pour l'intervalle $[5, +\infty[$ et qu'il est négatif dans les deux autres.

Ainsi, si on considère l'inéquation $x(x-2)(x-5) \geq 0$, alors l'ensemble des solutions est la réunion des deux intervalles:

$$[0, 2] \cup [5, +\infty[.$$

Voici les quatre différentes configurations selon l'inégalité choisie:

Inéquation	Représentation des solutions	Solutions		
$x(x-2)(x-5) \geq 0$		$[0, 2] \cup [5, +\infty[$		
$x(x-2)(x-5) > 0$		$]0, 2[\cup]5, +\infty[$ $x(x-2)(x-5) \leq 0$		$]-\infty, 0] \cup [2, 5]$
$x(x-2)(x-5) < 0$		$]-\infty, 0[\cup]2, 5[$		

Petit rappel sur les intervalles. Un intervalle est **fermé** si il contient ses deux extrémités, il se note alors avec des crochets tournés vers l'intérieur, comme $[0, 2]$. Au contraire, on dit que l'intervalle est **ouvert** si les deux extrémités sont exclues et on tourne alors les crochets vers l'extérieur. En bref, si on a une inéquation large, les intervalles de solutions seront fermés et si l'inéquation est stricte ils seront ouverts.

Avec la pratique, vous verrez que la plupart du temps les expressions changent de signe en passant par 0. Ainsi, les zones positives et négatives alternent à chaque solution de l'équation. Mais attention ce n'est pas systématique: le contre-exemple le plus simple est x^2 qui s'annule pour $x = 0$ mais sans changer de signe puisqu'un carré est toujours positif.

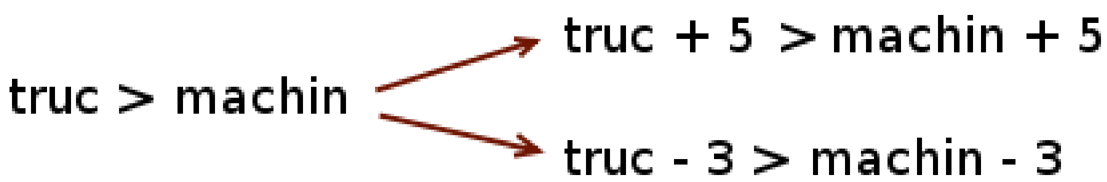
IV.1.2. Méthode de résolution

La plupart des techniques de manipulation d'équations marchent de la même façon pour les inéquations. Il y a cependant quelques petites subtilités que nous allons voir maintenant.

Dans cette section nous n'allons traiter que des exemples de supériorité stricte, mais tout ce que nous allons dire marche également dans les trois autres cas.

IV.1.2.1. Tous à gauche !

Si on a une inéquation, il est possible d'ajouter ou de soustraire le même terme à gauche et à droite sans en changer les solutions. En schéma cela donne ceci:



Cette propriété est vraiment fondamentale car c'est elle qui nous permet de passer tous les termes du même côté pour simplifier nos équations. Ainsi, comme pour les équations, toutes les inéquations peuvent se réécrire sous la forme:

$$f(x) > 0.$$

IV.1.2.2. Multiplions

Lorsque l'on a besoin de multiplier les termes d'une inéquation, en revanche, il y a un piège. Si on multiplie des deux côtés par un nombre positif, pas de problème, cela marche de la même façon, en revanche, si on multiplie par un nombre négatif, alors le sens de l'inégalité est changé.

En bref, on a la règle suivante:

Cela marche évidemment de la même manière avec les divisions puisqu'une division n'est jamais qu'un cas particulier de multiplication. Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Prenez bien le temps d'y réfléchir, car dans le fond cette règle est tout à fait logique même si elle est surprenante quand on la voit pour la première fois. Quand on multiplie par un nombre négatif on renverse la droite des nombres: les positifs deviennent négatifs, les négatifs positifs et du coup les plus grands deviennent plus petits et les plus petits plus grands.

Ainsi, si par exemple votre inéquation est $-2x > 4$, alors en divisant par -2 des deux côtés on trouve $x < -2$! L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -2[$.

Méfiez-vous réellement de cette règle, c'est sans nul doute l'erreur numéro 1 que font les débutants.

IV.1.2.3. Tableaux de signes

Lorsque notre inéquation se présente sous une forme factorisée, c'est-à-dire qu'elle est le produit de plusieurs termes plus simples, alors il est possible d'étudier le signe de chacun de ces termes séparément avant de tout regrouper grâce à la règle de multiplication des signes.

Considérons par exemple l'inéquation suivante:

$$(x-2) \times \mathrm{e}^x \times \sqrt[3]{x} > 0.$$

Nous avons la multiplication de trois termes:

- $x-2$ est négatif si $x < 2$ et positif si $x > 2$;
- e^x est toujours positif;
- $\sqrt[3]{x}$ est négatif si $x < 0$ et positif si $x > 0$.

Finalement, nous avons deux valeurs frontière où un changement de signe est possible: 0 et 2. Nous pouvons récapituler ce que nous venons de dire dans le tableau suivant:

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
x-2	−	−	+
e^x	+	+	+
$\sqrt[3]{x}$	−	+	+
$(x$-2$)\times e^x \times \sqrt[3]{x}$			

Il ne reste plus qu'à remplir la dernière ligne. Pour cela il faut se rappeler de la règle de multiplication des signes: si on multiplie un nombre par un nombre positif, cela ne change pas son signe tandis que si on le multiplie par un nombre négatif, son signe est inversé.

Ainsi, dans chaque colonne, il suffit de compter le nombre de signes négatifs. S'il y en a un nombre pair, alors le produit est positif, et s'il y en a un nombre impair alors le produit est négatif. Le tableau se complète donc de la façon suivante:

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
x-2	−	−	+
e^x	+	+	+
$\sqrt[3]{x}$	−	+	+
$(x$-2$)\times e^x \times \sqrt[3]{x}$	+	−	+

L'ensemble des solutions de notre inéquation est donc l'intervalle $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

IV.1.2.4. À vous de jouer

Vous avez maintenant toutes les clefs en main pour pouvoir résoudre l'équation donnée en préambule de cette annexe: trouver les nombres ayant un carré plus petit que leur triple.

Essayez de trouver la réponse par vous-même avant de regarder la solution, et si vous avez un doute n'hésitez pas à retourner lire ce que nous avons vu plus haut.

Nous cherchons donc à résoudre l'équation suivante:

$$x^2 < 3x.$$

Comme nous l'avons vu, la première chose à faire est de tout passer du même côté:

$$x^2 - 3x < 0.$$

Nous pouvons maintenant factoriser:

$$x(x - 3) < 0.$$

Et il ne reste plus qu'à dresser notre tableau de signe:

x	$-\infty$ 0	3	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x(x-3)$	$+$	$-$	$+$

L'ensemble des solutions de notre inéquation se résume à l'intervalle $]0, 3[$. Bravo si vous aviez trouvé!

Conclusion

Voilà, ce cours est maintenant terminé! Si vous avez des remarques ou des questions à propos de celui-ci, n'hésitez pas à les poser dans les commentaires. Pour des questions plus générales sur les équations, vous pouvez également utiliser le forum Science de Zeste de Savoir.

Cinquième partie

Références

Voici la liste des documents/livres que j'ai consultés lors de l'écriture de ce cours, par ordre alphabétique de leurs auteurs.

- **Tablette BM 13901** - Anonyme - XVIIIe siècle av. J.-C.
- **Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison** (   ) - M. Al-Khawarizmi - 833
- **A History Of Mathematical Notations - Vol I : Notations In Elementary Mathematics** - F. Cajori - The open court company - 1928
- **Ars Magna** - G. Cardano - 1545
- **The book of Numbers** - J. H. Conway et R. K. Guy - Copernicus books - 1996
- **Des mathématiciens de A à Z** - B. Hauchecorne et D. Surreau - Ellipses - 1996
- **L'algèbre au temps de Babylone** - J. Høyrup - Vuibert - 2010
- **Traité de la résolution des équations numeriques de tous les degrés** - J.-L. Lagrange - Duprat - 1798
- **Oh, les maths!** - Y. Perelman - Dunod - 1993