Zeste de savoir

Introduction aux fonctions

16 janvier 2023

Table des matières

Introduction

?

Vous trouvez que les maths, ça ne bouge pas assez?

Avec les fonctions, c'est terminé. Les nombres, les ensembles ou les figures géométriques, tous ces objets mathématiques que vous connaissez déjà vont se mettre en mouvement. Les fonctions sont en quelque sorte des machines qui transforment les objets. Grâce à elles les mathématiques passent à la vitesse supérieure.

Que vous n'ayez jamais entendu parler de fonctions, que vous vouliez réviser ce que vous avez vu en cours, ou que vous soyez là par simple curiosité, ce tuto est fait pour vous! Nous allons partir de zéro et tout expliquer simplement, il n'y a aucune raison d'avoir peur: ce cours est accessible à tous, quel que soit votre niveau de départ.

Première partie

Les maths en mouvement

Introduction

Il existe plusieurs types de fonctions en mathématiques. Nous allons voir leur définition et leur organisation et la façon dont on peut les utiliser.

I.1. Qu'est-ce qu'une fonction ?

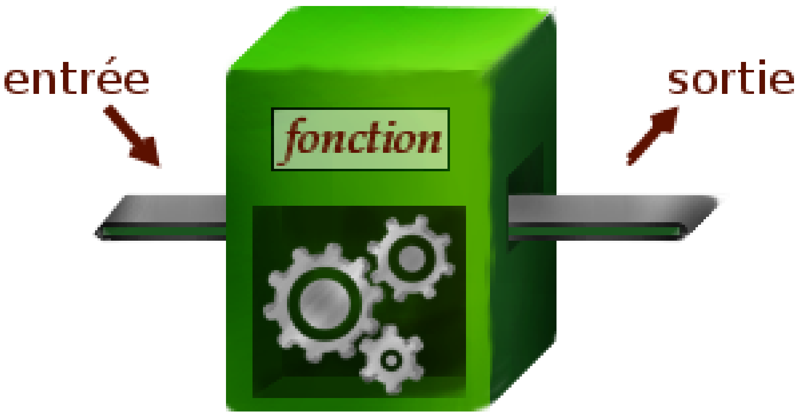
Introduction

Alors c'est parti? Vous êtes prêt pour partir à la découverte du monde des fonctions?

Dans ce premier chapitre, nous allons apprendre ce que sont les fonctions, comment elles marchent et dans quels contextes on les rencontre. Rassurez-vous, il n'y aura rien de bien compliqué pour l'instant, il s'agit simplement d'un premier contact pour commencer en douceur.

I.1.1. En avant les machines !

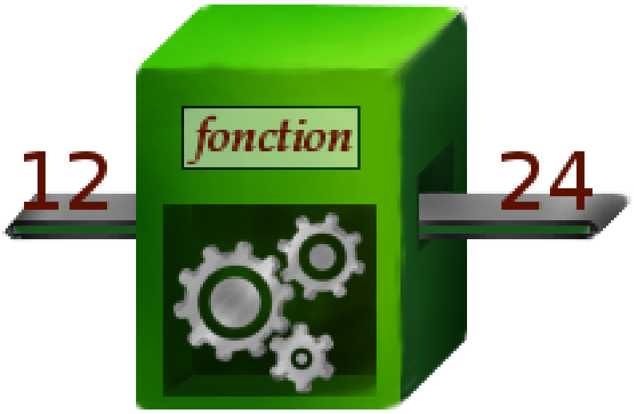
Rentrons sans attendre dans le vif du sujet. Une **fonction** est une machine qui transforme quelque chose en autre chose. Pour cela, il se trouve d'un côté une entrée où l'on place l'objet à transformer et de l'autre une sortie où l'on récupère le résultat. Schématiquement, cela se présente de la façon suivante.



Jusque-là, la définition est assez vaste. On pourrait dire par exemple qu'une vache est une fonction qui transforme l'herbe en lait, qu'un moulin est une fonction qui transforme le blé en farine, qu'une ampoule est une fonction qui transforme l'électricité en lumière ou encore, comme l'illustrait Paul Erdős, qu'un mathématicien est une fonction qui transforme le café en théorème.

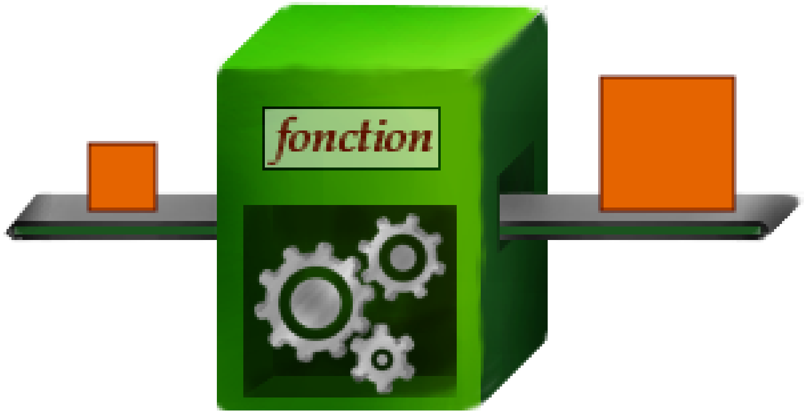
Mais puisque l'on fait des maths, vous vous doutez certainement que les fonctions dont nous allons parler ne sont ni des vaches, ni des moulins et ne s'alimentent pas d'herbe, de blé ni de café. Les fonctions que nous allons étudier dans ce tuto sont des fonctions mathématiques, donc abstraites, qui transforment des objets mathématiques en d'autres objets mathématiques.

Voyons quelques exemples. Considérons pour commencer une fonction, qui prend en entrée un nombre et qui nous donne en sortie le double du nombre qu'on lui a donné. Par exemple, si on entre le nombre 12 dans notre machine, il en ressort 24.



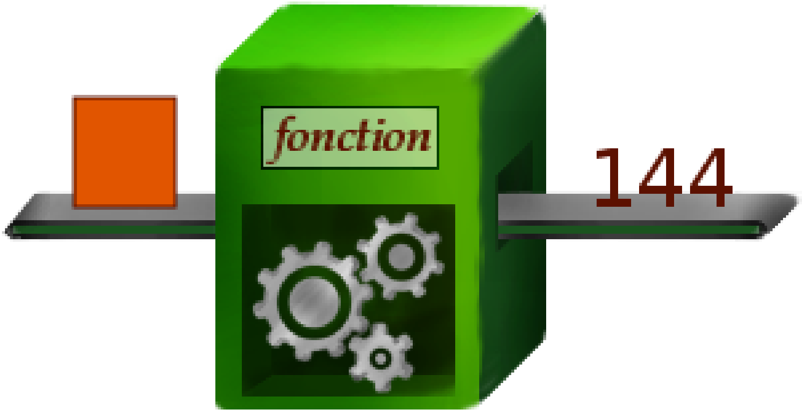
Si en revanche on y entre 100, il en ressort 200, si on y entre -1 il en ressort -2 et si on y entre 0, il en ressort… 0. Nous avons là affaire à une fonction numérique car son entrée et sa sortie sont des nombres.

Mais les nombres ne sont pas les seuls objets mathématiques qui existent: on peut également imaginer des fonctions géométriques. Par exemple, voici une machine qui prend en entrée une figure géométrique et qui donne en sortie une figure semblable mais dont les dimensions ont été doublées.



Nous verrons dans le chapitre consacré aux fonctions géométriques que celle-ci peut se nommer une homothétie.

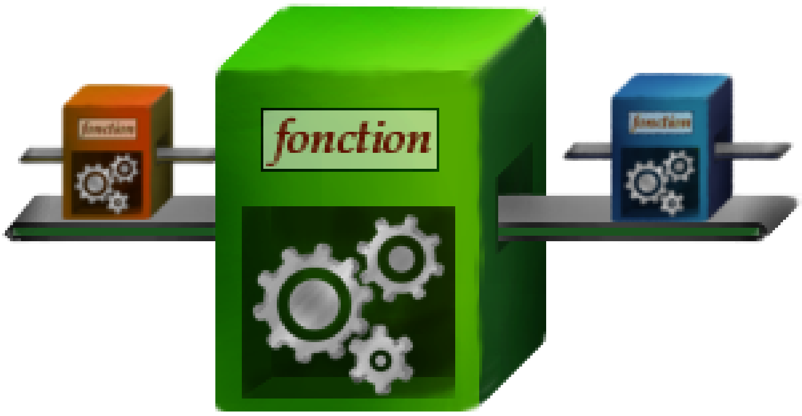
Entre les nombres et la géométrie, il est même possible de mélanger les genres. On peut considérer une fonction à laquelle on donne une figure géométrique et qui renvoie son périmètre. Nous avons donc une figure en entrée et un nombre en sortie.



Les possibilités des fonctions sont énormes et les seules limites sont celles de notre imagination. Les nombres, les figures géométriques, mais aussi les ensembles ou encore les vecteurs, tout peut y passer. Il est possible d'inventer des fonctions transformant n'importe quels types d'objets mathématiques!

> ?
> Vraiment n'importe lesquels? Mais alors, une fonction est elle-même un objet mathématique, n'est-ce pas? Il devrait donc être possible d'inventer des fonctions qui transforment des fonctions en fonctions? 🤔

Parfaitement! Non seulement c'est possible, mais c'est même très fréquent et nous y consacrerons le dernier chapitre de ce cours.



Diabolique n'est-ce pas? Vous voilà désormais prévenu, les fonctions ont plus d'un tour dans leur sac et nous réservent de belles surprises. 😊

I.1.2. Soyons précis

Nous venons de voir que la notion de fonction en mathématiques est très vaste et regroupe des choses extrêmement différentes puisqu'on peut en voir apparaître dans toutes les branches des mathématiques. Cela a une conséquence un peu moins amusante: la définition d'une fonction demande d'être posée avec beaucoup de précision.

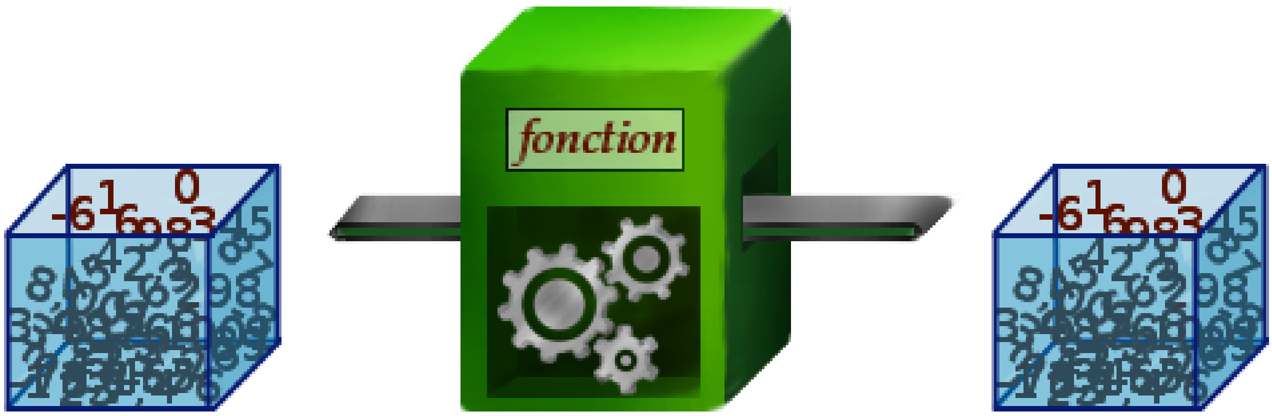
I.1.2.1. Ensembles de départ et d'arrivée

Si je vous dis par exemple qu'on considère une fonction qui multiplie par 2. Ai-je parlé d'une fonction numérique qui multiplie un nombre par 2? Est-ce une fonction géométrique qui double la taille d'une figure? Et dans ce cas, est-ce que cela signifie que l'on multiplie les longueurs par 2 auquel cas les aires sont multipliées par 4 ou bien multiplie-t-on les aires par 2 ce qui veut dire que les distances ne sont multipliées que par $\sqrt{2}$? Mais multiplier par 2, c'est aussi quelque chose que l'on peut faire avec des vecteurs, avec des nombres complexes, avec des équations, et même, nous le verrons un peu plus tard, avec des fonctions!

Bref, vous l'aurez compris, si je parle simplement d'une fonction qui multiplie par 2, je suis encore loin d'avoir défini précisément ma fonction.

La conclusion de cela, c'est que pour définir une fonction, il ne s'agit pas simplement de définir le mécanisme de la machine, c'est-à-dire la façon dont sont transformés les objets que l'on met dedans, il faut aussi au préalable définir précisément quel type d'objets notre fonction est capable de transformer et quel type d'objets elle renvoie en sortie. Autrement dit une fonction doit toujours être accompagnée de deux ensembles:

— un **ensemble de départ**: c'est l'ensemble des objets que l'on peut mettre dans la machine, c'est-à-dire tous les objets pour lesquels le mécanisme de la machine a été clairement décrit;
— un **ensemble d'arrivée**: c'est l'ensemble des objets que la machine est susceptible de renvoyer. Voici schématiquement comment se représente alors une fonction numérique.



Ici, les ensembles de départ et d'arrivée ne contiennent que des nombres.

I.1.2.2. Ensemble de définition et image

Mais les choses seraient encore trop simples si l'on s'arrêtait là.

I.1.2.2.1. Ça coince au départ

L'ensemble de départ est celui qui contient tous les objets du type pour lequel on veut faire marcher notre machine, mais il est tout à fait possible que cet ensemble contienne encore des objets pour lesquels la machine ne marche pas.

Prenons par exemple la fonction numérique qui a un nombre associe son inverse. Si on lui donne 2, elle renverra 1/2, si on lui donne 7/3 elle renverra 3/7 et ainsi de suite. C'est une fonction numérique et son ensemble de départ est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire tous les nombres positifs, négatifs, entiers ou à virgule. Oui mais voilà, parmi tous les nombres réels, il existe un récalcitrant qui a le mauvais goût de ne pas avoir d'inverse: c'est 0. On ne peut pas diviser par 0 et l'inverse de ce nombre n'est donc pas défini. Ce nombre-là, quoique étant dans l'ensemble de départ ne donnera donc pas de résultat par notre fonction.

Comme pour l'inverse il existe de nombreuses autres fonctions qui ont ainsi des valeurs interdites. C'est pour cette raison que l'on définit à l'intérieur de l'ensemble de départ un sous-ensemble nommé **ensemble de définition** qui contient toutes les valeurs pour lesquelles la fonction va bien marcher.

> La distinction entre ensemble de départ et ensemble de définition n'est parfois pas aussi claire que ça. Par exemple, sachant que 0 n'a pas d'inverse, il aurait été possible de l'écarter dès le début et de choisir $\mathbb{R}^*$ (l'ensemble des réels non nuls) comme ensemble de départ. Mais si cet exemple est simple, il est fréquent de devoir définir des fonctions pour lesquelles trouver l'ensemble de définition demande pas mal de recherche. Dans ce cas, on ne peut pas exclure dès la définition de la fonction les valeurs interdites que l'on ne connait pas encore.

En géométrie, les mathématiciens savent calculer les aires des figures classiques depuis l'Antiquité, mais ce n'est qu'au XXe siècle qu'ils ont découvert qu'il existait des figures dites non mesurables pour lesquelles il n'est pas possible de calculer l'aire, c'est-à-dire pour lesquelles la fonction bloque de la même façon que pour l'inverse de 0. Comme quoi, il faut parfois beaucoup de temps pour pouvoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction!

I.1.2.2.2. Ça manque à l'arrivée

Un problème similaire peut se produire à l'arrivée. Il est possible que l'ensemble d'arrivée contiennent certains objets que la fonction n'est pas capable de fabriquer. Autrement dit, quel que soit l'objet de l'ensemble de départ que vous mettrez dans la machine, vous n'obtiendrez jamais ce résultat à la sortie.

L'ensemble des objets que la fonction est capable de sortir s'appelle son **ensemble image**.

Un exemple classique est celui de la fonction numérique qui à un nombre réel associe son carré. On sait que le carré d'un nombre est toujours positif, ainsi l'image de cette fonction est l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs. Les nombres négatifs n'en font pas partie.

Il faut tout de même dire que le problème de l'ensemble image est nettement moins grave que celui de l'ensemble de définition. Autant mettre dans la machine un objet qui peut la casser est dangereux et peut aboutir à des contradictions, autant ne pas pouvoir obtenir certains objets en sortie, il faut le savoir mais il n'y a pas de quoi en faire un drame.

> Là où l'ensemble image peut jouer des tours, c'est pour la résolution des équations. Une équation est souvent une question du type «quel objet faut-il mettre dans la fonction pour

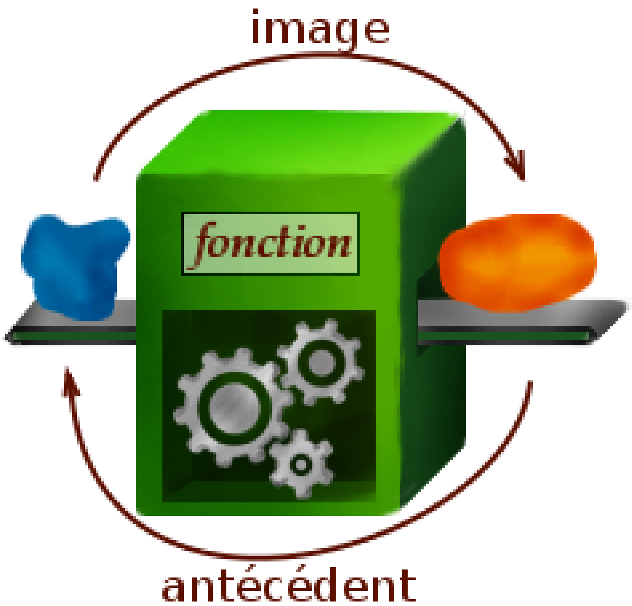
obtenir tel résultat?», autrement dit, c'est un moment où l'on essaye de faire marcher la machine à l'envers. Si le résultat souhaité ne fait pas partie de l'ensemble image, alors notre équation n'aura pas de solutions.

I.1.2.3. Image et antécédent

Un dernier petit point de vocabulaire. Si on met un objet de l'ensemble de départ dans la fonction, le résultat est appelé son **image**. Par exemple, si on considère la fonction qui à une figure géométrique associe son périmètre, alors l'image d'un carré de côté 5 par cette fonction est 20.

Notez que l'ensemble image est composé de tous les éléments de l'ensemble d'arrivée qui sont des images d'éléments de l'ensemble de départ. Le vocabulaire est donc bien cohérent. 😊

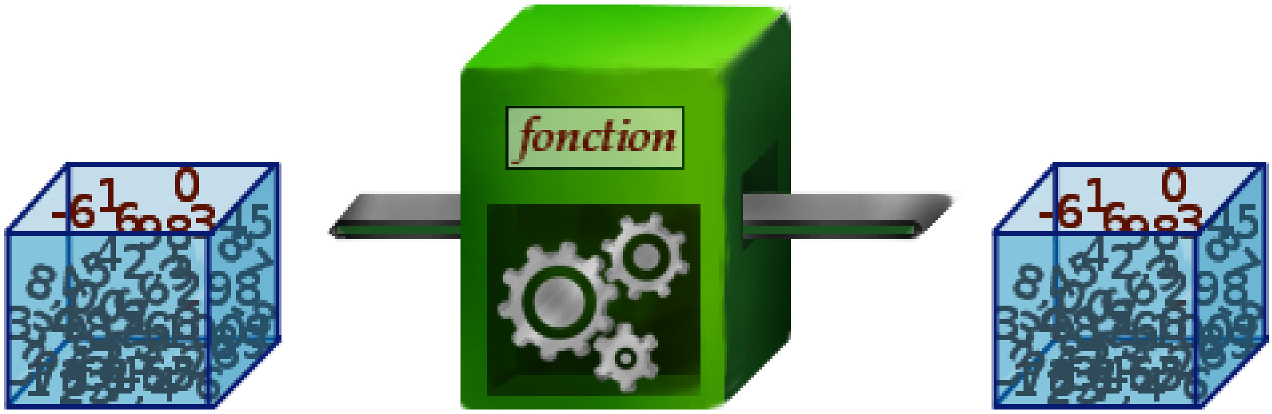
Dans l'autre sens, si on a un objet de l'ensemble d'arrivée, alors un élément de l'ensemble de départ qui donne cet objet quand on le met dans la fonction s'appelle un **antécédent**. Ainsi, le carré de côté 5 est un antécédent de 20 par la fonction périmètre.



Chaque élément de l'ensemble de départ ne peut avoir qu'une seule image, mais en revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir beaucoup d'antécédents. Par exemple, pour la fonction périmètre, le nombre 20 a énormément d'antécédents car il existe une infinité de figures différentes dont le périmètre est égal à 20.

I.1.3. Écriture symbolique

Jusque-là, nous avons décrit le fonctionnement des fonctions et nous les avons représentées par des schémas comme celui-ci:



Cependant, vous vous doutez bien que ces dessins ne sont là que pour nous accompagner dans notre découverte des fonctions. Comme toutes les autres branches des mathématiques, l'étude des fonctions utilise un langage symbolique précis et qu'il est indispensable de connaître. C'est ce que nous allons apprendre maintenant.

Inutile d'apprendre par cœur tout ce qui suit. Lisez-le juste une fois pour avoir une idée de la façon dont se notent rigoureusement les fonctions, mais si certaines choses vous semblent trop abstraites du premier abord, ne vous en faites pas, c'est normal. Tout cela viendra avec l'habitude et la pratique.

Tout d'abord, il faut savoir que toutes les fonctions que l'on définit doivent porter un nom. Pour faire simple, en maths, on utilise souvent des noms d'une seule lettre, alors inutile d'aller chercher bien loin, la première du mot fera l'affaire: le nom le plus fréquent que l'on donne aux fonctions est f.

Lorsque dans un problème de maths on a besoin de plusieurs fonctions, alors on poursuit l'alphabet et après f les suivantes se nommeront g et h. Ce choix est le plus courant, mais n'a rien d'obligatoire. Si vous avez une bonne raison de vouloir appeler vos fonctions autrement, vous êtes libres.

Après avoir nommé la fonction, il faut nommer son ensemble de départ et celui d'arrivée. Les ensembles se notent en général avec des lettres majuscules. Dans le cas général, il arrive par exemple qu'on les note E et F, mais ce n'est pas systématique et cela dépend de la fonction. En réalité, très souvent ces deux ensembles sont des ensembles classiques qui ont déjà un nom usuel. Par exemple, il peut s'agir de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ou bien simplement de l'intervalle des nombres compris entre 0 et 1, $[0, 1]$.

Passons maintenant au nom d'un élément quelconque de l'ensemble de départ. Encore une fois, ce nom dépend de la fonction: s'il s'agit d'un nombre il sera souvent noté x, s'il s'agit d'un point géométrique ce sera A… Cet élément se nomme la **variable** de la fonction car il s'agit d'un objet que l'on peut choisir et faire varier contrairement aux objets d'arrivée qui sont déterminés par le mécanisme de la fonction.

À partir de là l'objet qui sort de la fonction se note en mettant l'objet d'entrée entre parenthèses après le nom de la fonction, comme ceci:

$$f(x)$$

Cette expression se lit «f de x» et désigne donc le résultat de la fonction quand on lui donne x. Il s'agit par conséquent d'un objet de l'ensemble d'arrivée. En réutilisant le vocabulaire que nous avons vu dans la section précédente, on peut dire que $f(x)$ est l'image de x par f tandis que x est un antécédent de $f(x)$.

Tout ce que nous venons de dire se résume alors de la façon suivante:

$$beginalignedfcolonE \rightarrow Fx \mapsto f(x)$$

Cette présentation constitue la définition rigoureuse d'une fonction. Elle signifie: f est la fonction qui part de E et qui va dans F et qui à un élément x qui appartient à E associe l'élément $f(x)$ qui appartient à F.

Voici par exemple la façon dont on peut définir la fonction inverse pour les nombres réels:

$$beginalignedfcolon\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}x \mapsto \frac{1}{x}$$

L'ensemble de définition se nomme pour sa part $D(f)$ (ou parfois $\mathrm{Def}(f)$) et l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, pour la fonction inverse, on a $D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

I.2. Fonctions numériques

Introduction

Une **fonction numérique**, c'est une fonction qui prend un nombre en entrée et rend un nombre en sortie. Seulement, il existe de nombreux ensembles de nombres différents! Les entiers naturels ou relatifs, les rationnels, les réels, les complexes... Alors quel type de nombres allons nous mettre dans notre fonction et qu'est-ce que cela change pour leur étude?

Dans ce chapitre, nous allons faire le tri dans tous ça et voir qu'il existe en réalité deux grandes familles de fonctions numériques.

> Pour en savoir plus sur les différents ensembles de nombres, vous pouvez consulter le cours Les nombres (bientôt sur Zds).

I.2.1. Le discret et le continu

I.2.1.1. Nombres solitaires ou nombre serrés

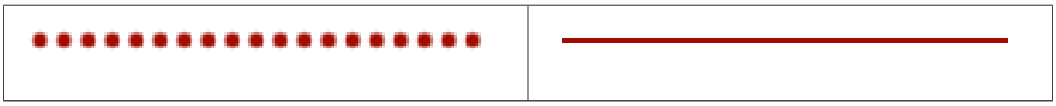
Les ensembles de nombres classiques se divisent généralement en deux grandes catégories:

— Les **ensembles discrets**: ce sont les ensembles dans lesquels les nombres sont isolés les uns des autres. Par exemple dans les entiers, chaque nombre possède un suivant qui est éloigné de lui d'une distance 1 et il n'y a pas d'autres nombres entiers entre les deux. Les deux ensembles discrets les plus courants sont $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

— Les **ensembles continus**: ce sont les ensembles dans lesquels les nombres sont agglutinés les uns aux autres et chaque nombre possède une infinité de voisins qui sont aussi proches de lui que l'on veut. L'ensemble continu le plus courant est $\mathbb{R}$, mais il faut aussi faire entrer dans cette catégorie tous les intervalles réels tels que $[-1, 1]$ par exemple ou encore l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

> Schématiquement, on peut dire que les ensembles discrets sont ceux qui se représentent par des points isolés tandis que les ensembles continus se représentent par une ligne continue, que l'on peut tracer sur une feuille sans lever le crayon.

Ensemble discret	**Ensemble continu**



À partir de là, les fonctions numériques se classent selon leur ensemble de départ.

— Si l'ensemble de départ est discret, alors la fonction se nomme une *suite*.
— Si l'ensemble de départ est continu, alors la fonction se nomme… *une fonction*.

Il n'existe pas de terme particulier pour désigner une fonction dont l'ensemble de départ est continu. Selon les cas on peut parler de *fonction réelle* ou de *fonction complexe*, mais il est fréquent qu'on utilise le mot fonction sans autre précision. En revanche, si l'ensemble de départ est discret, il faut bien utiliser le mot suite pour éviter toute confusion.

> **!** La plupart du temps, pour les fonctions (dont l'ensemble de départ est continu), l'ensemble de départ est de même nature que celui d'arrivée. Si on a des réels au départ on aura des réels à l'arrivée, et si on a des complexes au départ, on aura des complexes à l'arrivée. Ceci n'est pas vrai pour les suites: on peut parler de suite entière, de suite réelle ou de suite complexe selon l'ensemble d'arrivée et cela ne change rien au fait que les éléments de départ sont des entiers.

I.2.1.2. Notations

Les fonctions (dont l'ensemble de départ est continu) se notent de façon classique comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent:

$$beginaligned f colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto f(x)$$

Pour les suites en revanche, il y a quelques petites variations. Regardez:

$$beginaligned u colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} n \mapsto u_n$$

Avez-vous repéré les quatre différences?

— Premièrement, l'ensemble de définition n'est évidemment plus $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{N}$ puisqu'il s'agit d'une suite.
— Deuxièmement, la suite est notée par la lettre u à la place de f. Si on avait plusieurs suites on noterait les suivantes v et w.
— Troisièmement, la variable se nomme n au lieu de x. Ceci est normal, puisque c'est l'usage en maths de noter les nombres entiers avec cette lettre.

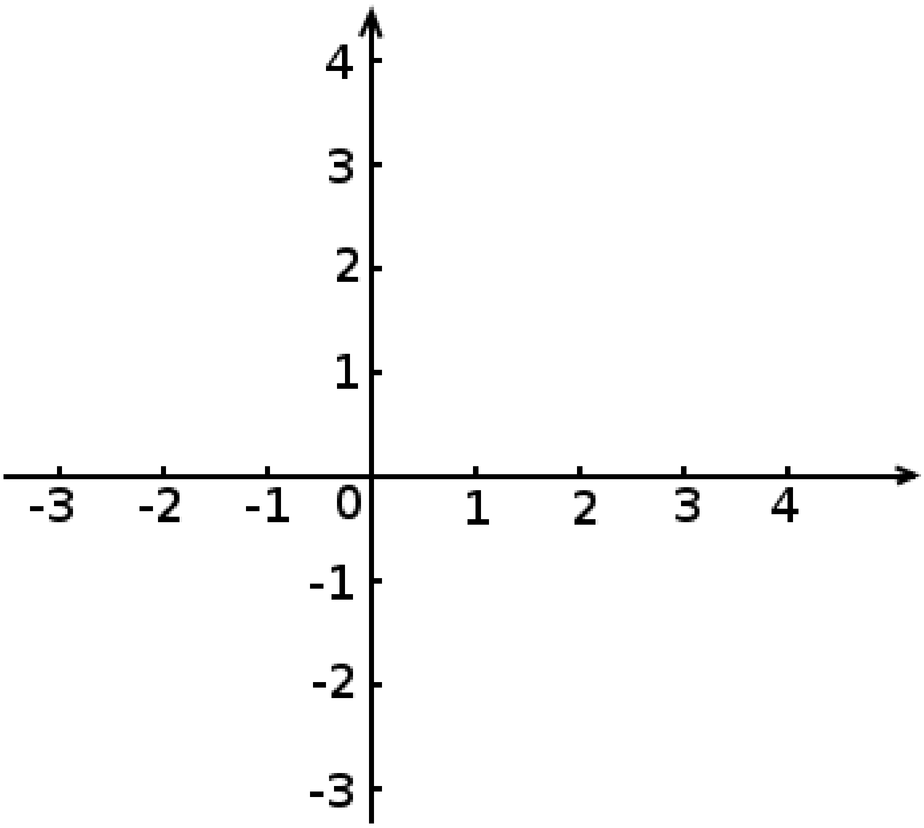
— Et quatrièmement, l'image de n par u n'est pas notée $u(n)$ avec des parenthèses, mais u_n avec la variable en indice.

Bon, ce ne sont que quelques petites variations de notation qui ne changent rien sur le fond. On s'y habitue par la pratique.

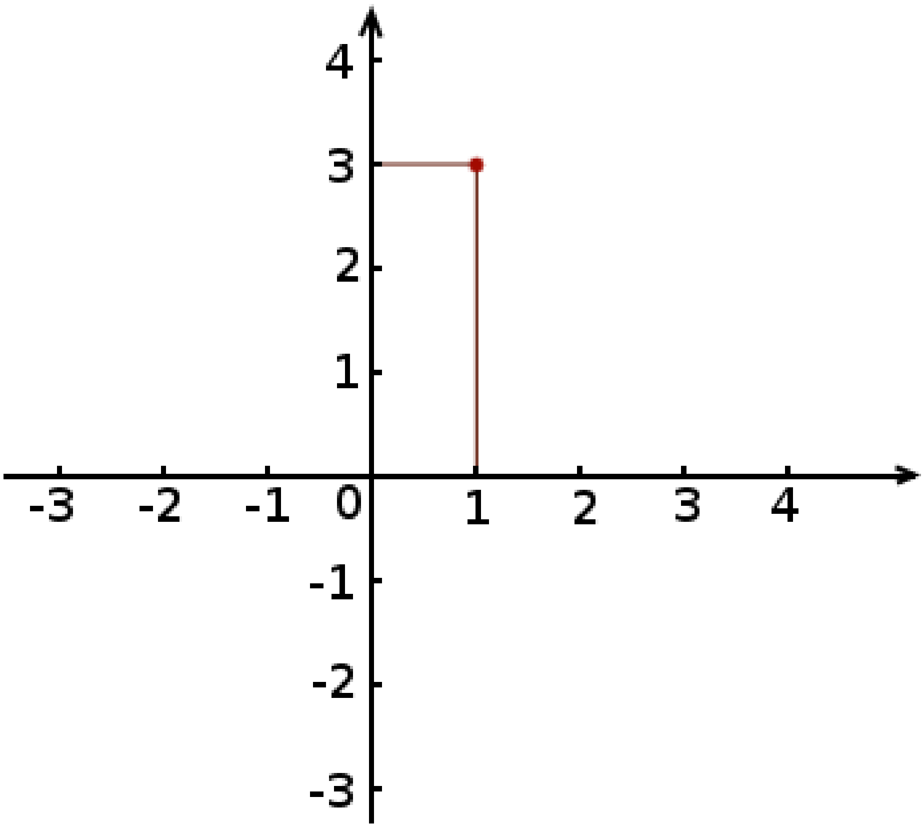
I.2.2. Représentation graphique

Il n'est pas toujours très facile d'y voir clair dans le mécanisme d'une suite ou d'une fonction à partir de sa définition. Pour remédier à cela, il existe une façon bien commode de les représenter et qui permet d'avoir en un coup d'œil une idée de leur fonctionnement: leur **graphe**.

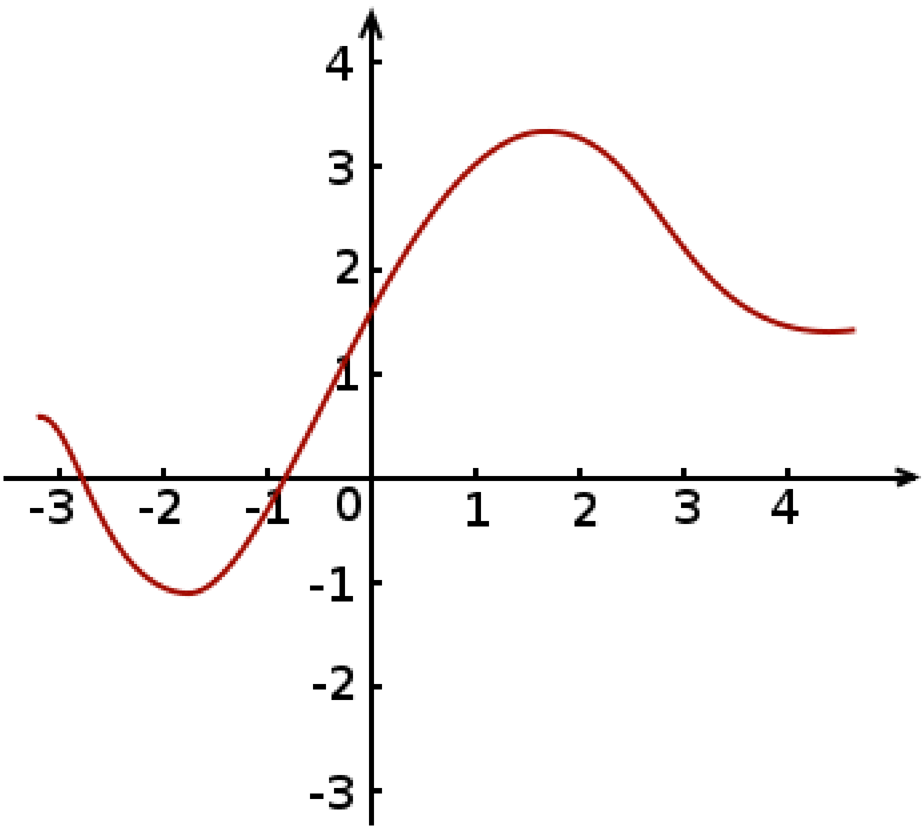
Pour tracer le graphe d'une fonction, il faut tout d'abord disposer d'un repère, c'est-à-dire deux axes gradués, l'un horizontal et l'autre vertical:



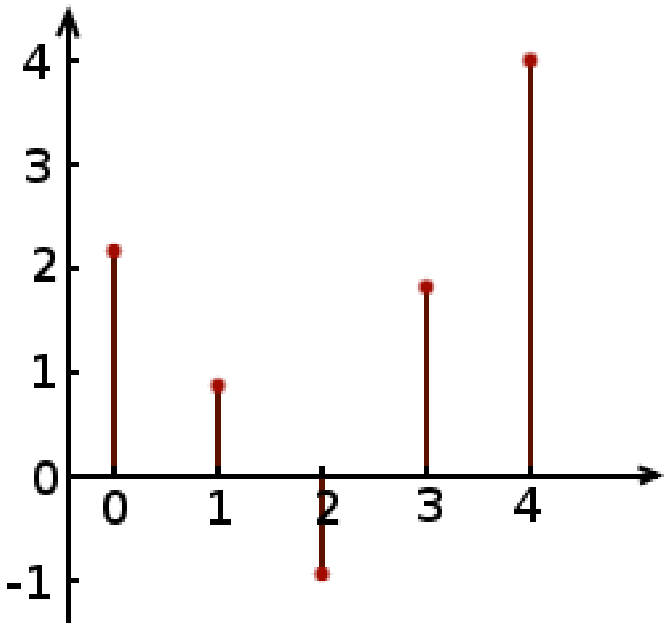
L'axe horizontal va alors représenter l'ensemble de départ et l'axe vertical celui d'arrivée. Si par exemple quand on prend le nombre 1 dans l'ensemble de départ, la fonction nous renvoie le nombre 3, nous allons représenter cela par un point qui se situe de la façon suivante:



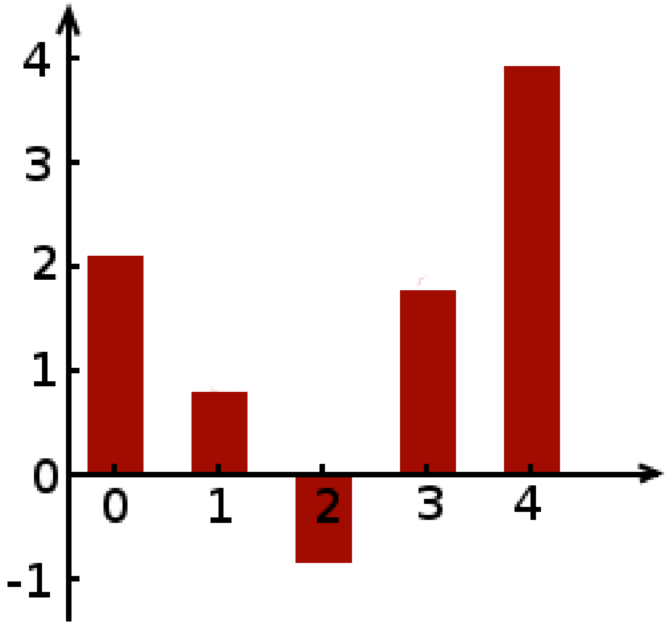
Le graphe de la fonction, c'est la figure que l'on obtient en plaçant tous les points obtenus pour tous les nombres de l'ensemble de départ.



Pour les suites le fonctionnement est le même, mais il n'y a des points qu'au dessus des nombres entiers de l'axe horizontal.



Pour plus de visibilité, puisqu'on a de la place, on peut carrément représenter cela avec des rectangles.



Le principe est tout simple, et pourtant, il n'est pas toujours facile de trouver le graphe d'une fonction à partir de sa formule. L'étude d'une fonction pour tracer son graphe fait parfois appel à des méthodes subtiles (voire franchement compliquées dans les pires des cas). Nous ne nous y attarderons pas ici, ce sujet pourrait faire l'objet d'un tuto à lui tout seul.

I.2.3. Avec ou sans formule

Nous avons vu dans le premier chapitre la définition la plus générale qui soit d'une fonction, mais cette définition a beaucoup évolué au cours de l'histoire. Dans cette section nous allons voir comment cette notion s'est transformée, ce qui va nous permettre de mettre le doigt sur quelques subtilités auxquelles on ne pense pas forcément quand on débute.

Le mot fonction a été introduit en 1692 par le mathématicien *Gottfried Wilhelm Leibniz* et provient du latin *fuctio* qui signifie exécution. Une fonction est donc un objet qui exécute une tâche. Pour Leibniz, il n'était pas encore question de prendre des ensembles de départ et d'arrivée quelconques: pour lui le terme ne désignait que les fonctions réelles. Les fonctions étaient étudiées à partir de leur graphe qui donnait des interprétations géométriques aux calculs effectués.

Au XVIIIe siècle, le terme est adopté par plusieurs mathématiciens parmi lesquels, le plus grand d'entre-eux, *Leonhard Euler*. Pour ce dernier, une fonction est une suite d'opérations que l'on fait subir à un nombre.

Leibniz et Euler

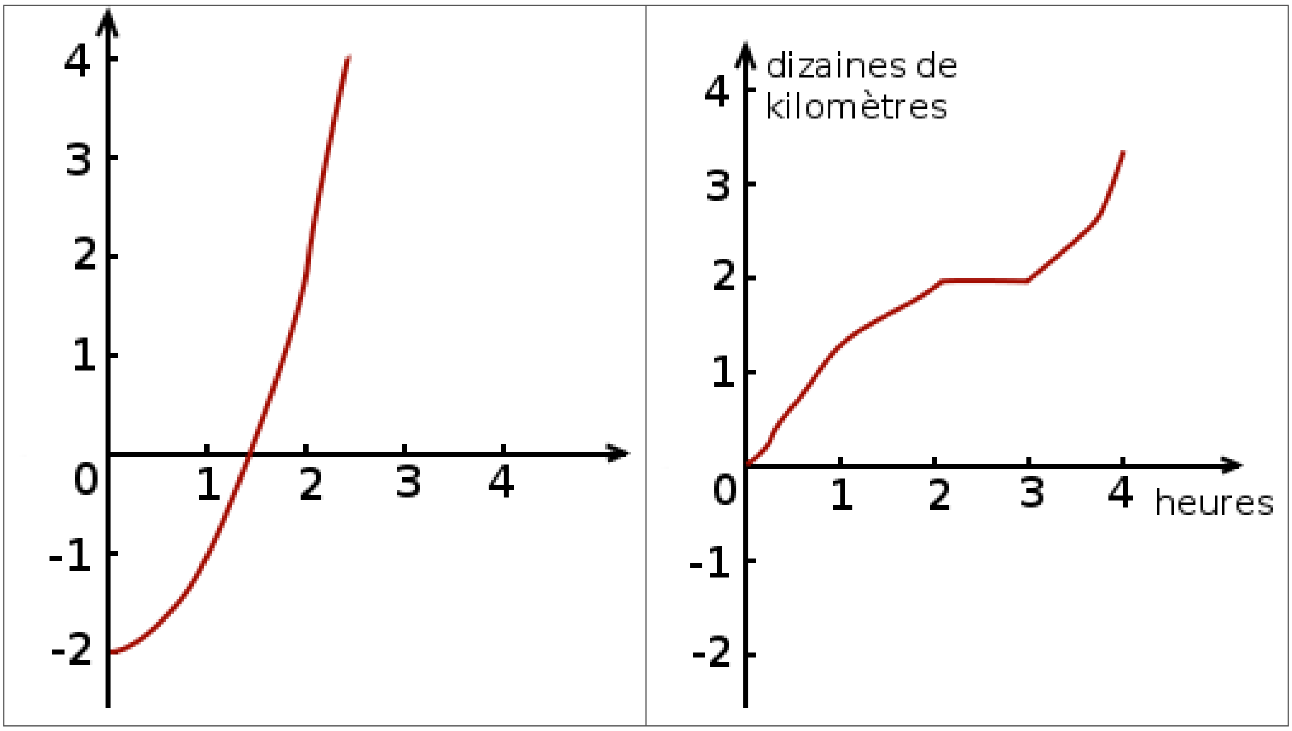
Aujourd'hui, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, une fonction est tout simplement une machine qui pour chaque objet de son ensemble de définition en renvoie un autre dans l'ensemble d'arrivée, même s'il n'y a aucune logique particulière dans la façon dont les objets d'entrée et d'arrivée sont associés.

Pour bien saisir la différence entre la définition moderne et celle d'Euler, prenons deux exemples concrets:

— **Exemple 1.** On considère une fonction qui à un nombre réel positif associe son carré moins deux.
— **Exemple 2.** On regarde le parcours d'un cycliste et on considère la fonction qui à chaque instant associe le nombre de kilomètres effectués.

Voici les graphes de ces deux fonctions:

Carré moins 2	**Cycliste**



Dans le premier exemple, la fonction est définie par une formule, on peut écrire $f(x) = x^2 - 2$. Pour le second, en revanche, il n'y a pas de formule: le cycliste peut rouler de façon très irrégulière, on ne peut pas trouver la distance parcourue à partir du temps par une simple formule.

Pour ces raisons, seul le premier exemple aurait été considéré comme une fonction par Euler au XVIIIe siècle.

> Aujourd'hui, en théorie des probabilités, on peut même considérer des fonctions aléatoires, par exemple la suite de nombres donnée par un dé que l'on jette plusieurs fois. Dans ce cas l'ensemble d'arrivée est simplement composé des nombres de 1 à 6, mais il n'est évidemment pas possible de donner le résultat du dé à partir d'un calcul: à chaque nouveau lancer le résultat n'est pas prévisible à l'avance! On ne peut pas calculer le résultat du dé au dixième lancer, simplement en prenant le nombre 10 et en lui appliquant une formule. Si c'était le cas, gagner aux jeux de hasard serait beaucoup plus facile!

I.3. Fonctions géométriques

Introduction

Pour les **fonctions géométriques** aussi, les premières choses à définir sont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. La plupart du temps, ces deux ensembles seront les mêmes: si on fait de la géométrie plane, alors notre ensemble de départ sera un plan dans lequel on peut tracer des figures comme des triangles, des polygones ou encore des cercles, et si au contraire on parle de géométrie dans l'espace, on pourra transformer des cubes, des sphères ou des polyèdres.

> La géométrie est une discipline aux nombreuses facettes et il est possible d'imaginer des fonctions dans tous les espaces géométriques existants, comme des espaces en dimension 4 ou supérieure ou encore des espaces non euclidiens dans lesquels les distances sont déformées.

Dans ce chapitre, nous limiterons les exemples à la géométrie plane, mais gardez bien à l'esprit que tout cela peut être décliné sous de nombreuses formes.

I.3.1. Représentation des fonctions

Avant de commencer, il faut lever une petite ambiguïté sur l'ensemble de départ et d'arrivée d'une fonction géométrique. En géométrie plane par exemple, il s'agit d'un plan et leurs éléments sont donc les points du plan. Ainsi, une fonction de géométrie plane est une machine à laquelle on donne un point et qui donne un autre point.

> Mais alors si l'ensemble de départ ne contient que des points, il n'est pas possible de transformer des figures géométriques?

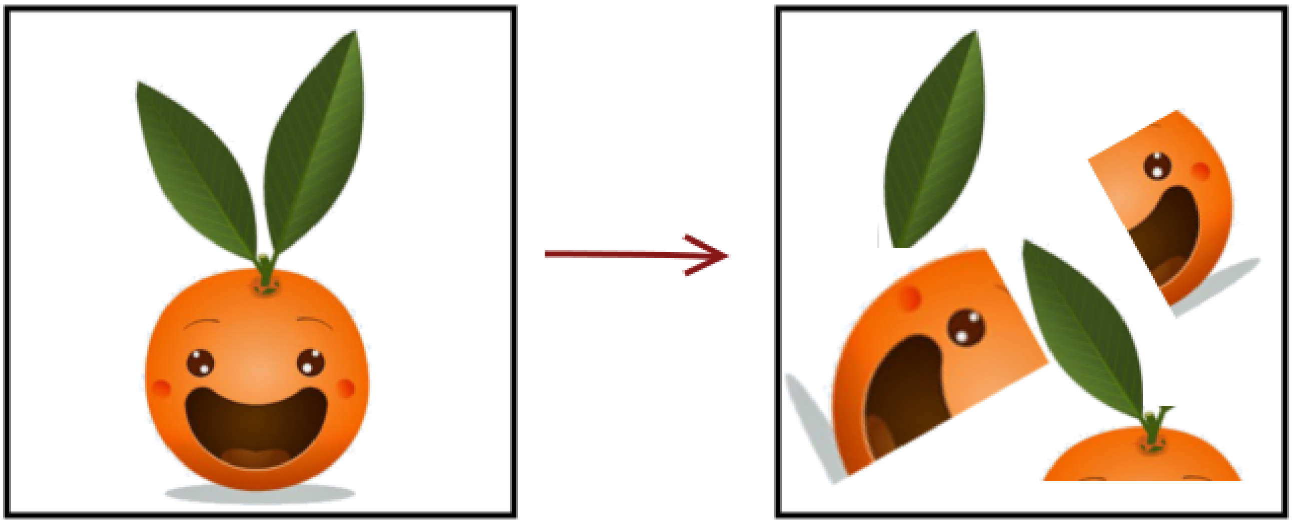
Il est vrai qu'habituellement, quand on parle de fonction géométrique, on s'attend plutôt à une machine qui transforme des figures entières. Mais une figure ce n'est rien d'autre qu'un ensemble de points, il est donc facile d'adapter une machine qui transforme des points pour lui faire transformer des figures entières: il suffit de prendre tous les points de la figure et de les transformer en même temps pour former la figure de sortie.

En bref, d'un point de vue parfaitement rigoureux une fonction géométrique ne transforme que des points, mais par abus de langage, on utilise souvent ces fonctions pour transformer des figures entières. Cette distinction peut paraître un peu subtile, et en réalité on l'oublie assez vite quand on passe à la pratique. D'ailleurs nous allons faire cet amalgame dans toute la suite de ce chapitre.

I.3.1.1. Clem déformée !

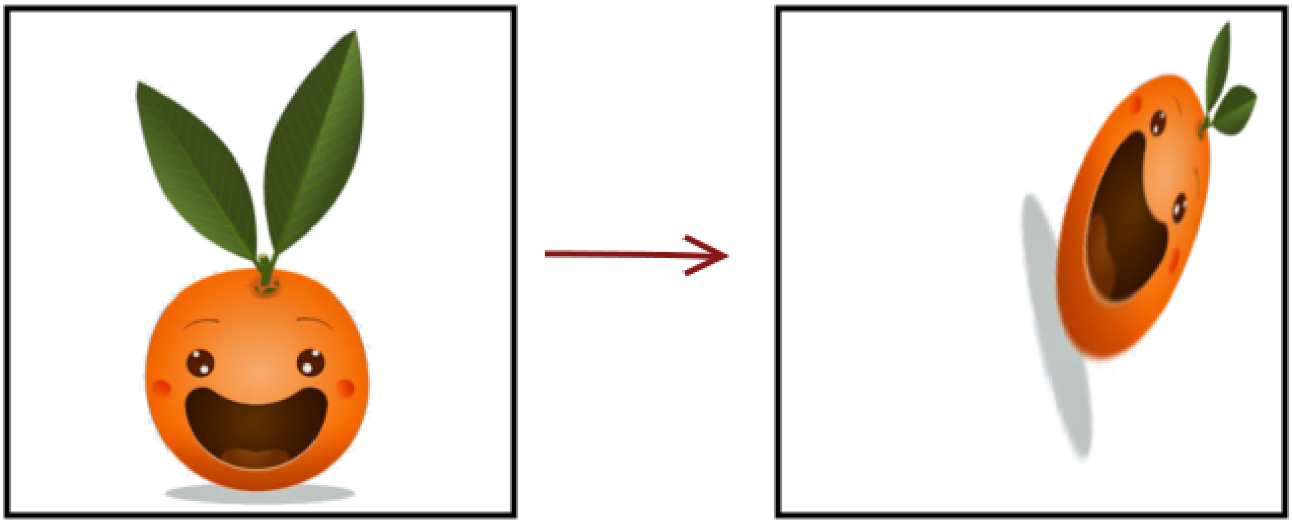
Une façon visuelle de représenter une fonction géométrique est de faire un dessin dans notre plan de départ pour pouvoir faire la comparaison entre la position des points avant et après le passage de la fonction.

Voici par exemple comment on peut représenter une telle fonction:



À gauche, on a le dessin de Clem dans le plan de départ, c'est-à-dire avant de transformer les points, puis à droite la même Clem, mais après l'execution de la fonction. On voit que les points se sont déplacés et mélangés. Chaque point du plan de départ se retrouve à un endroit dans le plan d'arrivée.

En réalité, en géométrie, on étudie assez peu ce genre de fonctions qui découpent les figures en petits morceaux comme un puzzle. La plupart des fonctions géométriques intéressantes sont des fonctions dites continues, c'est-à-dire qu'elles déforment et déplacent, mais sans faire de découpage. En voici un exemple:



Dans la suite de ce chapitre, nous allons faire un peu de tri en donnant quelques critères qui permettent de classifier ces fonctions.

I.3.2. Tiroirs à fonctions

On peut imaginer une multitude de façons de transformer des figures planes. Nous allons maintenant voir les principales d'entre elles et faire un peu de classement pour mieux s'y retrouver dans cette jungle géométrique.

> À quelques adaptations près, toutes les transformations que nous allons voir peuvent également être définies en trois dimensions. Vous pouvez essayer de les imaginer au fur et à mesure.

I.3.2.1. Les isométries

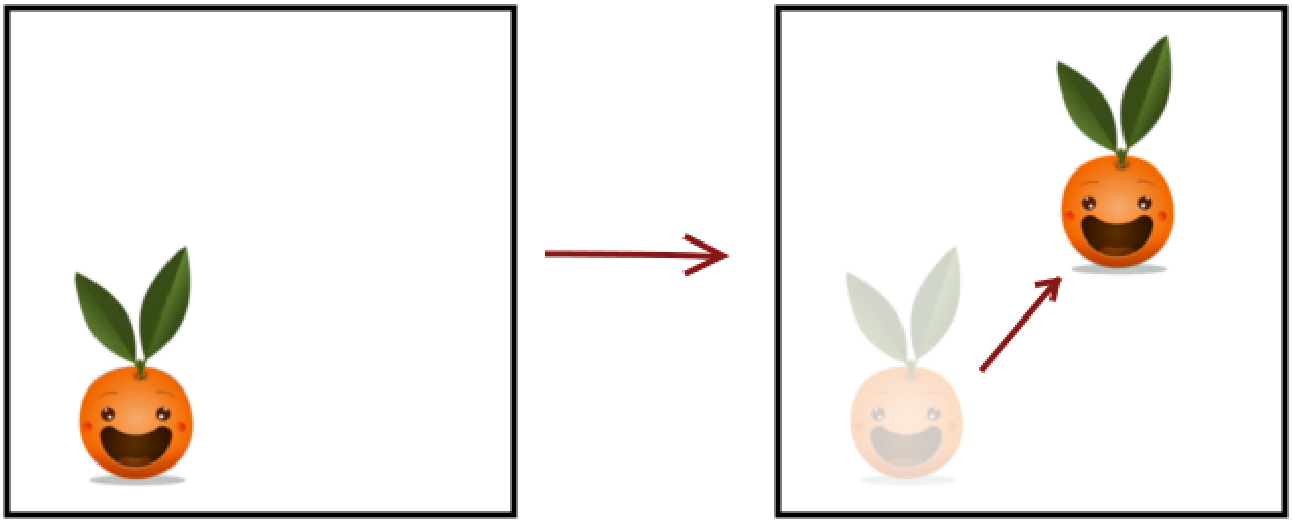
Les plus simples de toutes les transformations géométriques sont les **isométries**. Ce sont celles qui conservent les longueurs des figures. Autrement dit, une isométrie se contente de déplacer les figures géométriques sans les déformer.

> Le mot isométrie est formé du préfixe grec *iso-* qui signifie égal et du mot *métrie* qui désigne la mesure. L'isométrie est donc bien une fonction qui garde les mesures égales. Le préfixe iso- se retrouve par exemple dans l'adjectif isocèle qui qualifie un triangle ayant deux côtés égaux, le mot métrie est également très utilisé, par exemple dans le mot trigonométrie qui désigne l'étude des mesures d'un triangle (aussi appelé trigone).

Faisons un petit tour d'horizon des isométries classiques.

I.3.2.1.1. Les translations

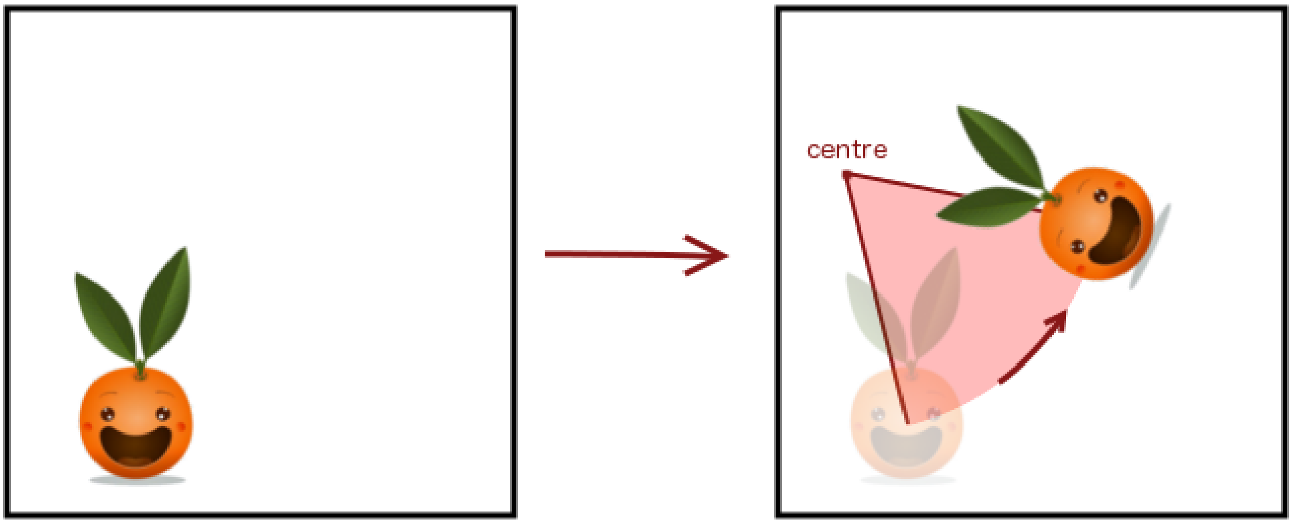
Une **translation** est une transformation qui décale simplement les points d'une certaine distance dans une certaine direction. En voici un exemple:



Clem s'est simplement déplacée, sans être ni déformée, ni tournée, ni retournée.

I.3.2.1.2. Les rotations

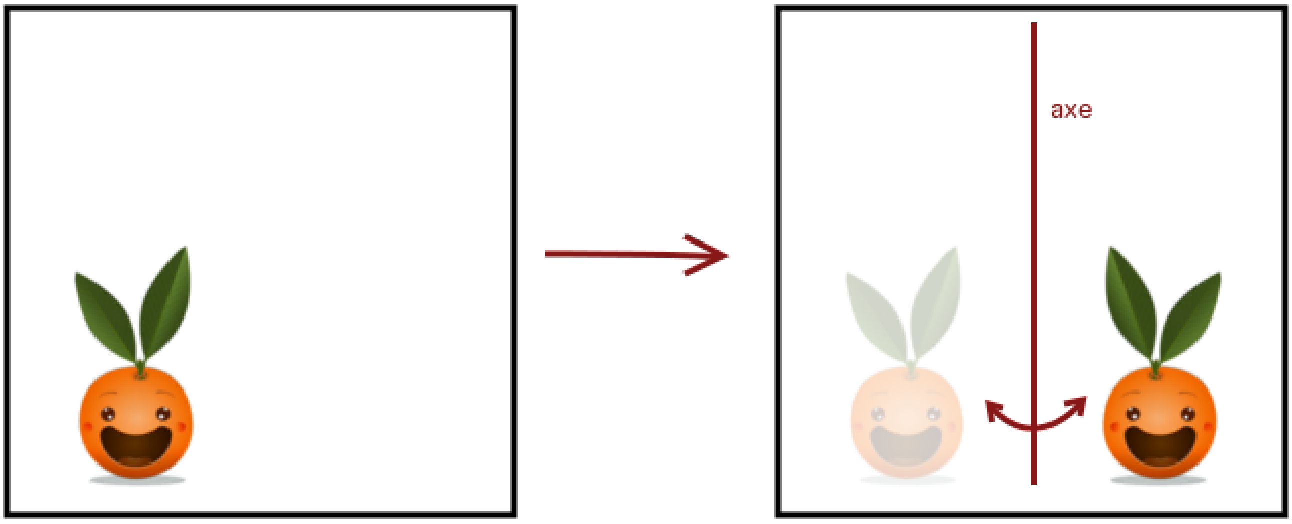
Une **rotation** est une transformation qui fait tourner les figures d'un certain angle autour d'un point qui se nomme le centre de la rotation. Voici un exemple:



Notez que dans une rotation, le centre est le seul point à ne pas bouger.

I.3.2.1.3. Les symétries

Une **symétrie** est une transformation qui retourne une figure à la façon d'un miroir par rapport à une droite donnée qui se nomme l'axe de symétrie. Voici sa représentation en image:



Quand on fait une symétrie, tous les points qui se trouvent sur l'axe ne bougent pas: si on met ces points dans la fonction, elle les rend tels quels sans les avoir modifiés.

Notez que l'exemple ci-dessus s'appelle une symétrie axiale car on fait la symétrie par rapport à une droite (l'axe) dans le plan, mais on peut également faire des symétries par rapport à un point, et même par rapport à un plan quand on fait de la géométrie dans l'espace.

Les trois transformations que nous venons de voir (translations, rotations et symétries), sont les briques de base permettant de reconstituer toutes les autres isométries. Notez que les isométries peuvent être classées en deux catégories:

— Les **déplacements** qui déplacent la figure sans la retourner. Ce sont celles dans lesquelles il n'y a pas de symétrie, autrement dit, quand on observe l'image de Clem, sa plus petite feuille reste à gauche et la grande à droite. Les translations et les rotations sont des déplacements.
— Les **antidéplacements** qui retournent la figure. Ce sont celles où une symétrie intervient, éventuellement combinée avec des translations et rotations. Si on regarde l'image de Clem par un antidéplacement, sa petite feuille est passée à droite et sa grande à gauche.

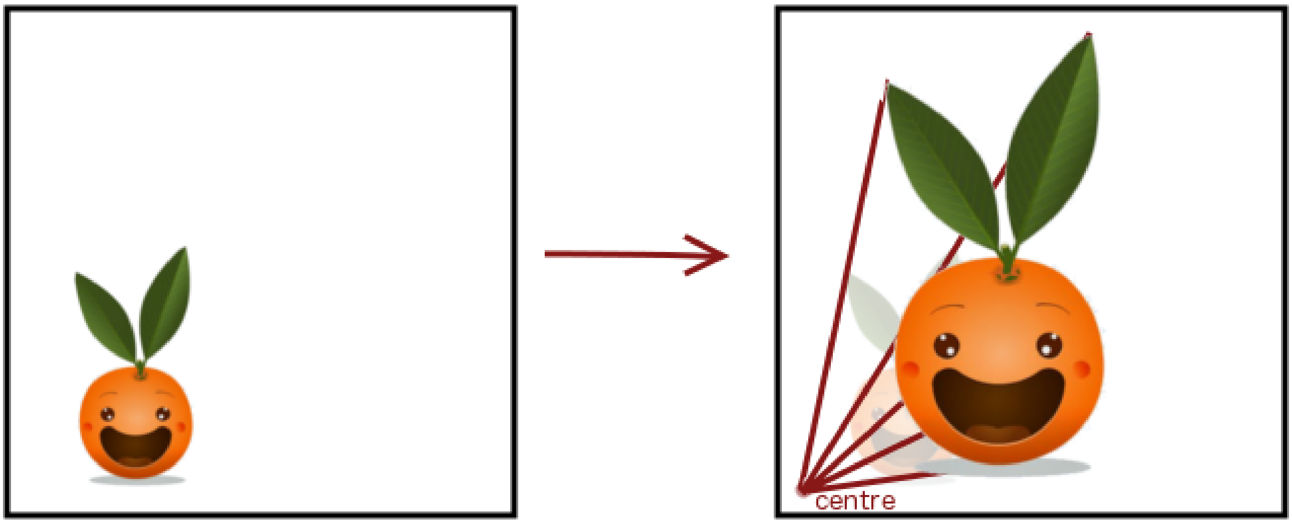
I.3.2.2. Les transformations affines

Une **transformation affine** est une fonction géométrique qui conserve les alignements. Autrement dit, si trois points A, B et C sont alignés dans la figure de départ, alors ils le sont toujours à l'arrivée.

Nous en connaissons déjà puisque toutes les isométries sont également des transformations affines. Mais il en existe également qui ne sont pas des isométries, c'est le cas par exemple des homothéties et des transvections que nous allons voir maintenant.

I.3.2.2.1. Les homothéties

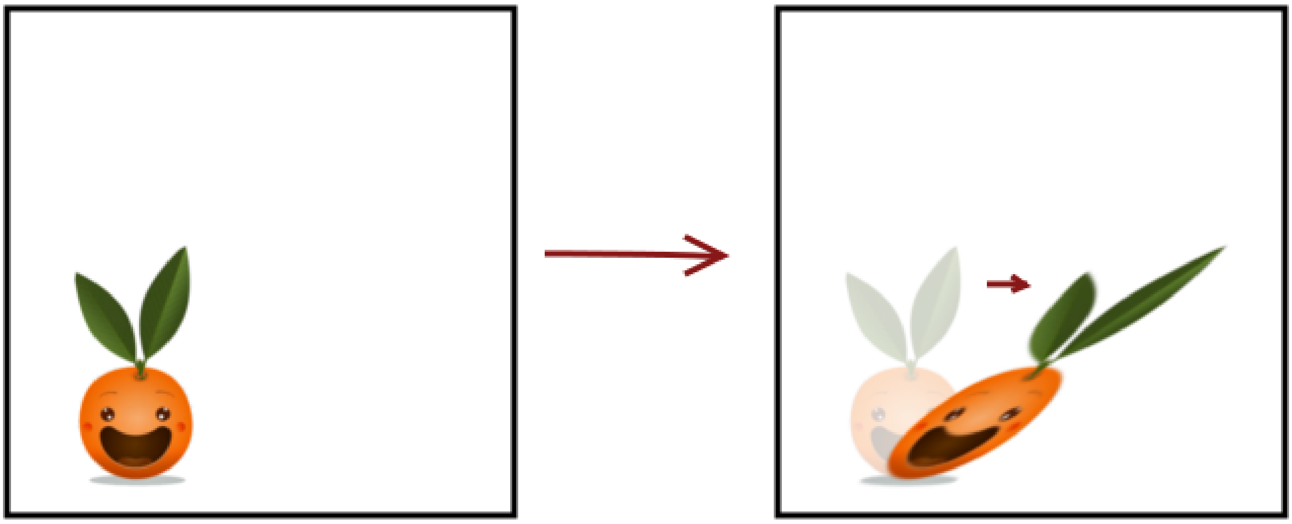
Une **homothétie** est une transformation qui agrandit les figures d'un certain rapport à partir d'un point appelé centre de l'homothétie. Voici un exemple avec un rapport égal à à 2:



Notez que si le rapport de l'homothétie est plus petit que 1, alors les figures ne sont pas agrandies mais réduites.

I.3.2.2.2. Les transvections

Une **transvection**, aussi appelée cisaillement, est une transformation qui penche les figures dans une certaine direction. Elle est un peu difficile à décrire sans dessin, je vous laisse donc la découvrir avant de la commenter un peu plus:



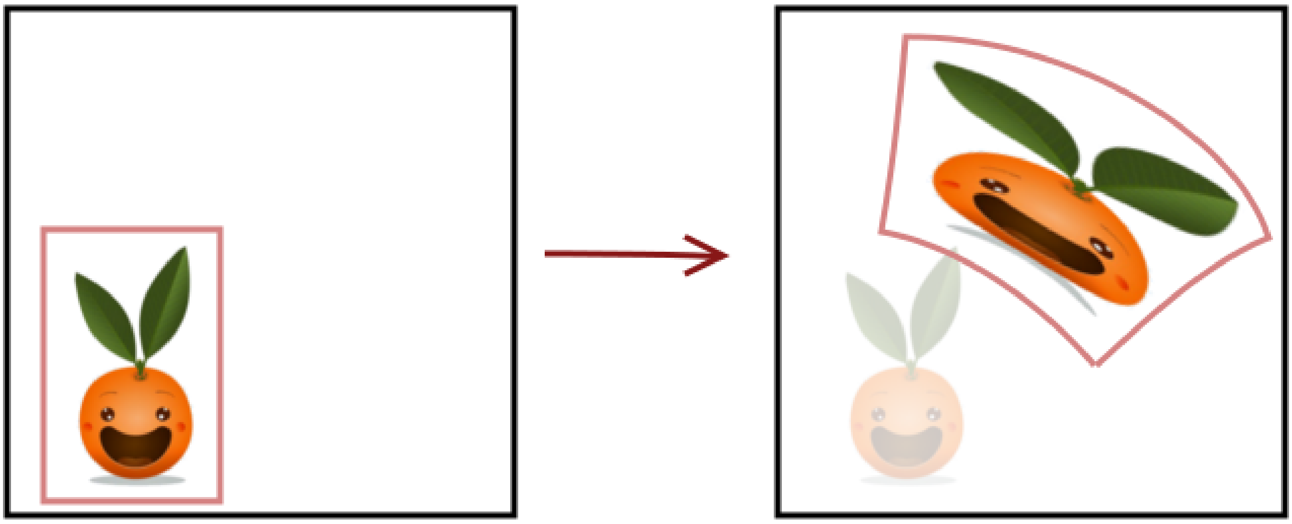
Il s'agit ici d'une transvection horizontale car tous les points sont déplacés en restant sur une même ligne horizontale. Les points situés en bas de Clem ne sont pas déplacés, en revanche, plus on va vers le haut, plus le décalage est important de façon à ce que les alignements soient conservés.

On pourrait construire de la même façon des transvections verticales ou dans n'importe quelle autre direction donnée et avec des décalages plus ou moins importants.

I.3.2.3. Les transformations conformes

Une **transformation conforme** est une transformation géométrique qui conserve les angles. Bien entendu, les isométries sont également des applications conformes, mais il y en a bien d'autres.

Ces applications peuvent sembler un peu mystérieuses la première fois qu'on les rencontre car il est assez difficile d'imaginer des transformations des figures qui conservent les angles sans conserver les alignements. En voici un exemple en image:



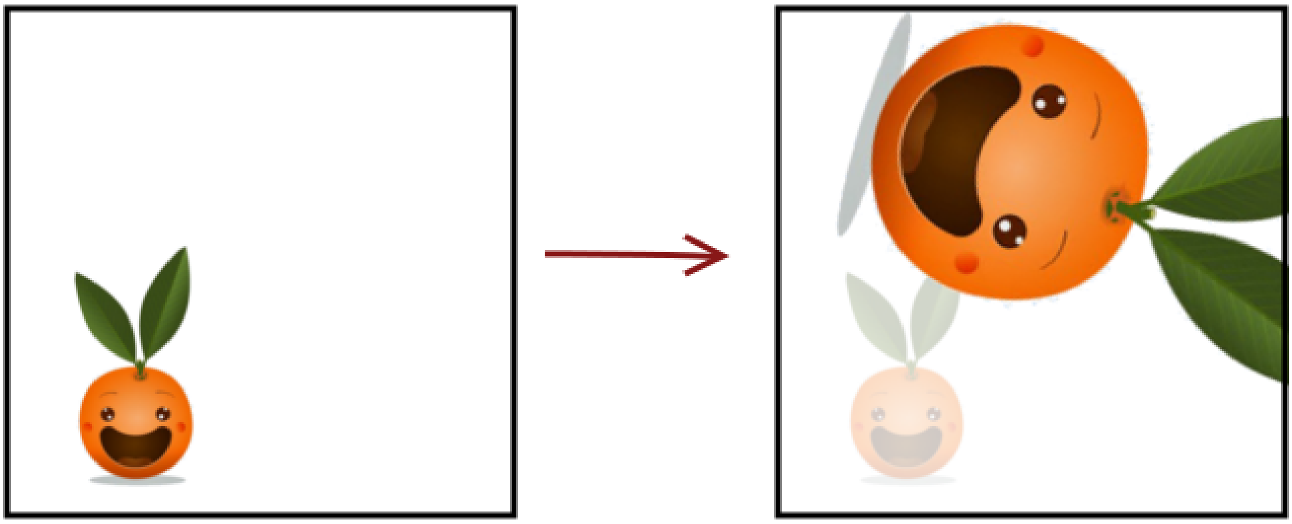
Le rectangle placé autour de Clem permet de constater que les quatre angles sont bien toujours des angles droits malgré la déformation des lignes.

I.3.2.4. Les similitudes

Les **similitudes** sont les transformations qui conservent à la fois les angles et les alignements. Ainsi, les similitudes conservent parfaitement les formes des objets, c'est-à-dire que l'image d'une figure sera une figure semblable.

Pour trouver toutes les similitudes, il faut donc prendre les transformations que nous venons de voir et exclure les transformations conformes qui ne conservent pas les alignements, ainsi que les transformations affines qui ne conservent pas les angles (comme les transvections). Une fois ce tri effectué, il ne reste plus que les isométries et les homothéties. Ainsi, une similitude est une combinaison de translations, de rotations, de symétries et d'homothéties.

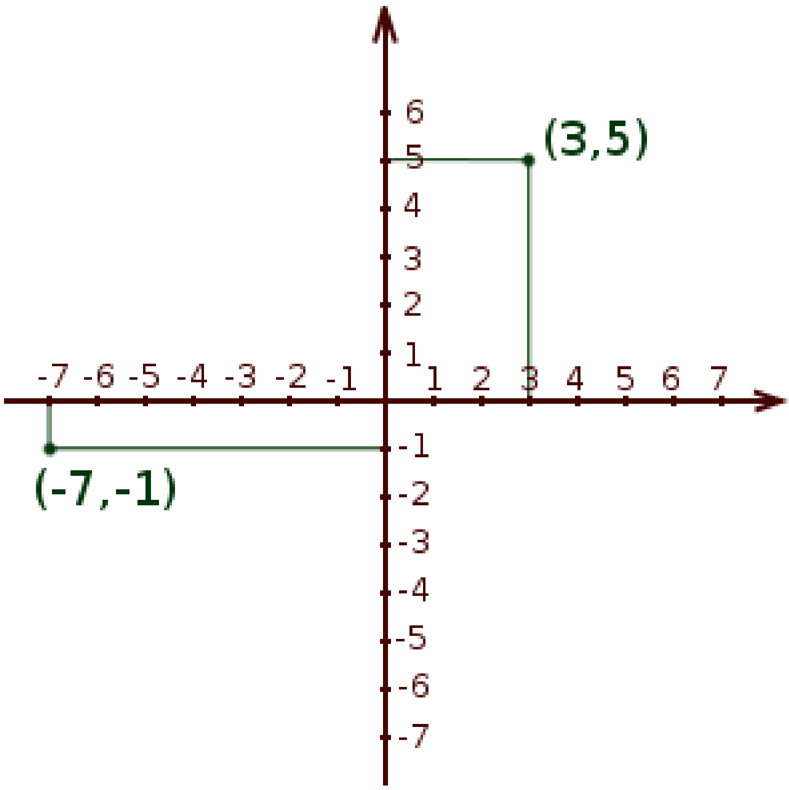
En voici un exemple:



I.3.3. Descartes s'en mêle

Au XVIIe siècle, le mathématicien et philosophe français **René Descartes** inventa un pont permettant de relier la géométrie à l'étude des nombres. Son idée était la suivante: repérer les points d'un plan par deux nombres que l'on nomme ses coordonnées. Pour cela, il suffit de disposer de deux axes gradués, le premier, horizontal, nommé axe des abscisses et le second, vertical, nommé axe des ordonnées.

Voici par exemple comment sont situés dans le plan les points de coordonnées (3,5) et (-7,-1):



Cette passerelle jetée par Descartes entre les deux domaines est extraordinaire, elle permet de traduire tout ce que l'on fait en géométrie en termes algébriques et inversement. Ainsi, toute fonction géométrique du plan peut être vue comme une fonction numérique à deux variables.

Par exemple, l'homothétie de rapport 2 et dont le centre se trouve à l'intersection des deux axes s'exprime de la façon suivante:

$$f(x, y) = (2x, 2y).$$

Autrement dit, les coordonnées sont simplement multipliées par 2. La symétrie par rapport à l'axe horizontal s'écrit comme ceci:

$$f(x, y) = (x, -y).$$

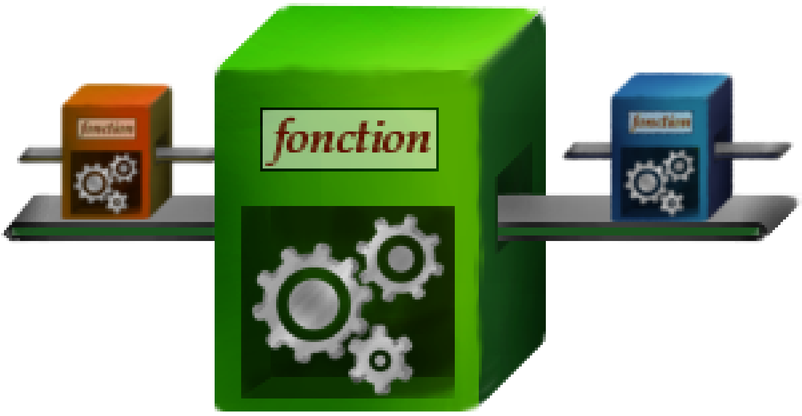
La première coordonnée reste inchangée, par contre la deuxième devient son opposé, ce qui correspond bien dans le plan au fait de passer d'un côté à l'autre de l'axe des abscisses.

Les deux exemples ci-dessus sont parmi les plus faciles à exprimer, mais toutes les fonctions géométriques peuvent se traduire de cette façon. Si vous avez envie de faire un peu chauffer vos neurones, essayez d'exprimer en termes algébriques quelques-unes des autres transformations géométriques que nous avons vues dans ce chapitre: translation, transvection, rotation d'un quart de tour, homothétie dont le centre se trouve en un autre point que le centre du repère…

I.4. Fonctions de fonctions

Introduction

Dans ce chapitre, nous passons au niveau supérieur puisque nous allons maintenant transformer… des fonctions! Cela peut paraître surprenant et un peu artificiel au premier abord, mais les différentes techniques de transformations des fonctions sont redoutablement utiles en maths et en sciences d'une manière générale.



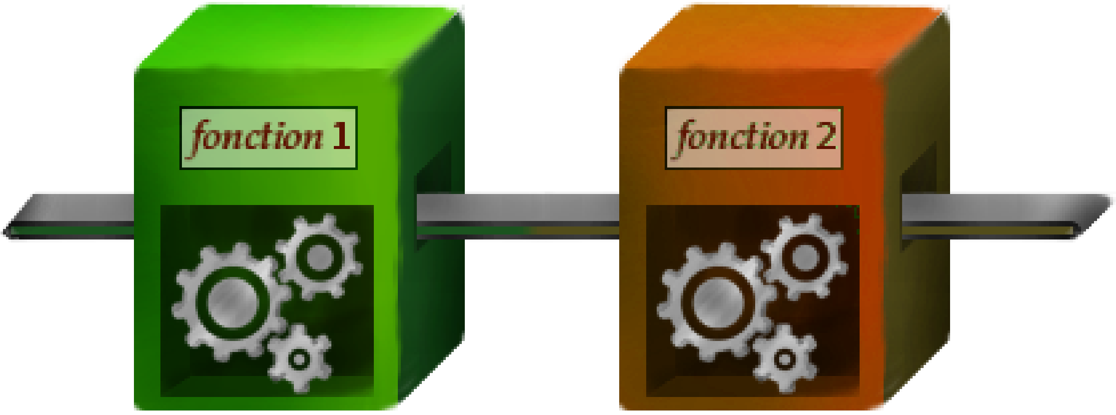
Ne soyez pas effrayés, nous allons aborder les choses en douceur.

I.4.1. Fonctions branchées

I.4.1.1. Fonctions à la chaîne

L'une des façons les plus élémentaires de transformer des fonctions est d'en prendre plusieurs et de faire des branchements entre leurs entrées et leur sorties.

Prenons deux fonctions et branchons la sortie de la première à l'entrée de la seconde:



Nous obtenons ainsi une nouvelle fonction qu'on appelle la composée de la fonction 1 et de la fonction 2. En notation algébrique, si on note f et g ces deux fonctions, alors la composée de f et g se note $g \circ f$ et se lit «g rond f» ou «f suivie de g». Ainsi, on a:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Autrement dit, on calcule d'abord $f(x)$, avant de le mettre dans la fonction g.

Le petit rond désigne l'opération de composition des fonctions, de la même façon que les symboles $+$ ou $\times$ désigne des opérations sur les nombres.

Prenons un exemple pour être sûr de bien comprendre. Supposons que f multiplie les nombres par 2 et que g ajoute le nombre 3, on a donc:

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = x + 3.$$

Alors la composée de f et de g est une fonction qui prend un nombre, le multiplie par 2 et lui ajoute 3 d'un seul coup.

$$g \circ f(x) = 2x + 3.$$

Par exemple, si on met 5 dans notre nouvelle machine, il en ressortira directement le nombre 13.

Méfiez-vous car le résultat d'une composition dépend de l'ordre dans lequel on compose: la fonction $g \circ f$ est celle qui effectue d'abord la fonction f et ensuite la fonction g. Si dans l'exemple précédent on fait la composition dans l'autre sens, on trouve: $f \circ g(x) = (x + 3) \times 2 = 2x + 6$. C'est une source très fréquente d'erreurs pour les débutants.

I.4.1.2. Les ensembles doivent se suivre

Jusque-là, nous avons oublié un détail dans notre description des fonctions composées: les ensembles de départ et d'arrivée. Il faut évidemment y faire très attention car si notre fonction 1 renvoie des figures géométriques et que notre fonction 2 est une suite qui ne prend que des nombres entiers en entrée, alors forcément ça va beaucoup moins bien marcher.

L'idéal, c'est que l'ensemble de départ de la deuxième fonction soit égal à l'ensemble d'arrivée de la première. Comme ça pas de problème, tout s'enchaîne naturellement. Si f et g sont définies de la sorte:

$$beginalignedfcolonEtoF \ x \mapsto f(x)$$

et $$\begin{aligned} g\colon F &\to G \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

alors leur composée se définit comme ceci:

$$beginalignedgcircf\colon E \to Gx \mapsto g(f(x)).$$

Pour être un peu plus large, vous pouvez remarquer qu'il est possible de se contenter de l'inclusion de l'ensemble d'arrivée de f dans l'ensemble de départ de g pour que ça marche.

I.4.1.3. À trois, à quatre, ou plus si affinité...

Nous venons de voir comment composer deux fonctions, mais il est bien entendu possible d'en enfiler autant que l'on veut les unes à la suite des autres. Si on dispose de trois fonctions f, g et h dont les ensembles de départ et d'arrivée s'enchaînent comme il faut, alors il est possible de construire la fonction $h \circ g \circ f$ qui effectue d'abord f, puis g, puis h:

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))).$$

Et si on dispose d'une fonction dont l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée, il est possible de la composer avec elle même! Cela se note alors sous la forme d'une puissance:

$$beginalignedf^2 = fcircf f^3 = f \circ f \circ f f^4 = f \circ f \circ f \circ f$$

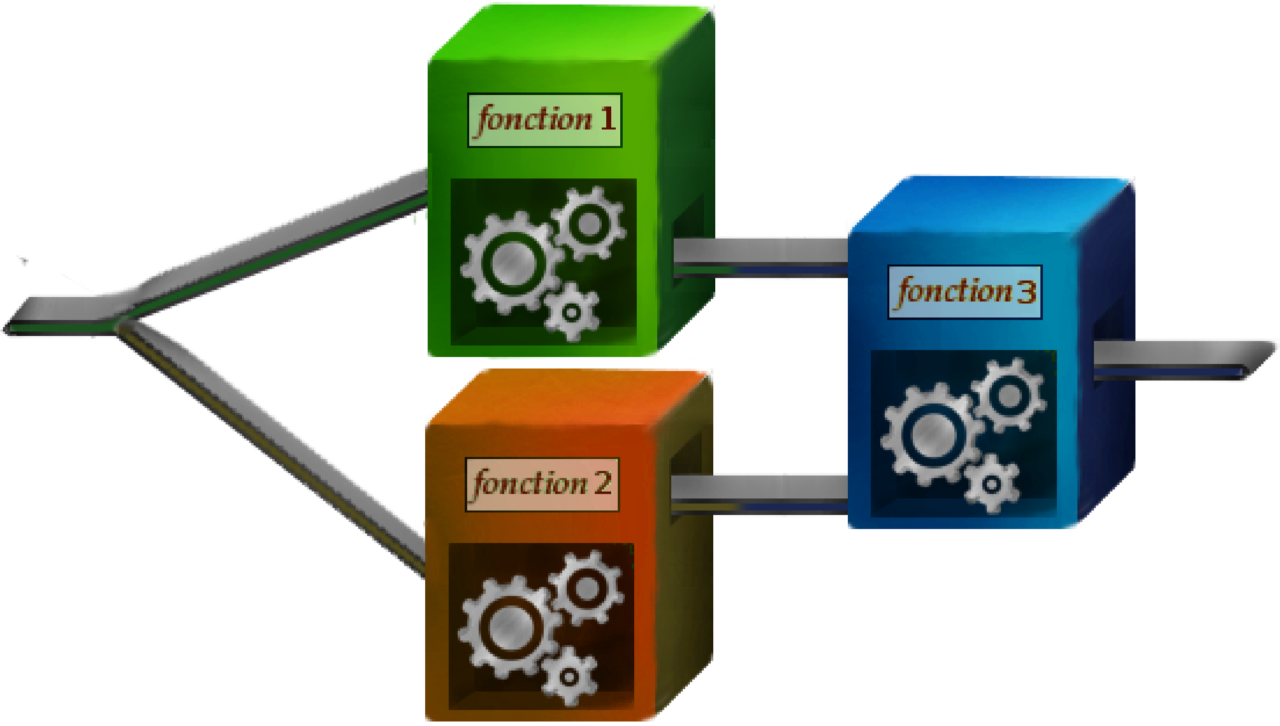
et ainsi de suite, une fois que vous avez compris le principe, vous pouvez brancher autant de fonctions que vous voulez dans l'ordre que vous voulez.

I.4.2. Opérations de fonctions

I.4.2.1. Les entrées et les sorties s'emmêlent

Pour l'instant, nous avons uniquement composé des fonctions à la chaîne, mais les choses peuvent commencer à devenir vraiment tordues, si on se met à utiliser des fonctions ayant plusieurs entrées ou plusieurs sorties.

Si par exemple on a d'une part deux fonctions avec une entrée et une sortie chacune, et d'autre part une fonction à deux entrées, alors il est possible de les assembler de la façon suivante:



En clair cette fonction marche de la façon suivante:

- on met notre objet d'entrée à la fois dans la fonction 1 et la fonction 2:
- on récupère les deux résultats obtenus et on en met un dans chaque entrée de la fonction 3;
- on récupère le résultat à la sortie de la fonction 3.

Si par exemple la fonction 1 double les nombres (x), que la fonction 2 les met au carré (x) et que la fonction 3 est simplement l'addition ((x, y)), alors tout ce montage donne simplement une fonction qui a un nombre associe la somme de son double et de son carré: $x \mapsto 2x + x^2$.

I.4.2.2. Faire des opérations de fonctions

Ce genre de construction permet surtout de faire des opérations de fonctions.

Prenons par exemple le cas de l'addition de deux fonctions dont nous venons de voir un exemple. Si on dispose de deux fonctions numériques f et g, leur somme $f + g$ est alors la fonction qui additionne les résultats donnés par f et par g. Elle est donc définie de la façon suivante:

$$beginalignedf + gcolon\mathbb{R} \to \mathbb{R}x \mapsto f(x) + g(x)$$

Autrement dit, on a $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Et de la même façon, on peut définir $f-g$, $f \times g$, $f \div g$ ou toute autre opération possible et imaginable, pourvu que cette opération soit possible dans l'ensemble d'arrivée des fonctions.

$$beginalignedf - gcolonmathbbRtomathbbR\ x \mapsto f(x) - g(x)$$

$$\begin{aligned} f \times g \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & f \div g \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \times g(x) & x &\mapsto f(x) \div g(x) \end{aligned}$$

> On peut également faire ce genre de chose avec des fonctions géométriques. Par exemple, l'intersection de deux figures est formée par les points qui appartiennent aux deux à la fois. Ainsi, on peut imaginer l'intersection de deux fonctions géométriques qui rend l'intersection de leur deux sorties.

Si ce genre de construction vous semble encore très obscur, ne vous en faites pas, ça va venir. En maths, il faut souvent du temps pour apprivoiser les concepts, il ne s'agit là que d'une première approche et tout ceci s'éclairera au fur et à mesure que vous avancerez dans l'étude des fonctions.

I.4.3. Cumuls et variations

Nous allons finir ce chapitre avec une brève introduction aux calculs de cumuls et de variations des fonctions numériques. Cette branche de l'analyse que nous n'allons qu'effleurer est en réalité l'une des plus importantes qui soit et se trouve au cœur même de l'étude des fonctions numériques.

I.4.3.1. La somme et la différence

Prenons tout de suite un exemple. Considérons une suite (u_n) qui représente le nombre de caramels mous produits mondialement chaque année. Par exemple, si $u_{2000} = 100$, cela signifie que cent millions de caramels mous ont été produits en l'an 2000.

Il est possible à partir de cette suite de vouloir en tirer d'autres informations. On peut par exemple vouloir savoir combien de caramels mous ont été produits sur une période plus vaste, dans ce cas, on va devoir sommer les termes de la suite. Par exemple, le nombre total de caramels mous produits au XXe siècle est égal à

$$u_{1901} + u_{1902} + u_{1903} + 1999 + u_{2000} = n = 1901^{2000} u_n.$$

Le symbole Σ (sigma) est utilisé en mathématiques pour faire des sommes. Si vous ne savez pas l'utiliser vous pouvez vous reporter au chapitre du cours sur les opérations qui lui est consacré (bientôt sur Zds).

On peut aussi ne pas être intéressés par la quantité précise de caramels produits, mais plutôt par leur évolution: la production est-elle plutôt en diminution ou en augmentation? Dans ce cas, les nombres qui nous intéressent sont les différences de production d'une année à l'autre:

$$\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$$

Ainsi, si cent millions de caramels mous ont été produits en 2000 contre seulement quatre-vingt-dix-sept millions en 1999, alors on a $\Delta u_{2000} = 3$.

La lettre grecque Δ (delta) est utilisée en mathématiques pour noter une différence.

Vous pouvez constater que les transformations Σ et Δ peuvent alors être considérées comme des fonctions qui prennent une suite en entrée.

En réalité, ces deux transformations sont les deux principaux outils qui permettent d'étudier les variations de la suite. Des transformations équivalentes existent pour les fonctions continues et se nomment la dérivée et l'intégrale. Nous verrons toutes ces transformations plus en détail dans les cours consacrés aux suites et aux fonctions réelles.

Conclusion

Voilà, notre introduction aux fonctions s'achève ici. Bien entendu, ce n'est qu'un début, le monde des fonctions est vaste et il vous reste encore une multitudes de choses à découvrir au fil de votre avancée dans les mathématiques!