

Queste de savoir

Empagement

2 septembre 2020

Table des matières

1. Le calcul 1

C'est un passage obligé lorsque l'on fabrique un document destiné à être lu longuement: faire une maquette.

La maquette, c'est entre autres la façon dont est disposé le texte sur la feuille. Il faut en particulier décider de son empage: la façon dont le bloc de texte est disposé sur la page.

Les valeurs par défaut des éditeurs de textes n'ont aucun sens, alors que c'est pourtant un choix déjà largement discuté et travaillé dans les toutes premières éditions.

Nous expliquons ici comment retrouver *l'empagement par neuf* qui est une règle très harmonieuse.

1. Le calcul

| | | |
|--|-----------------------|---|
| <p>CHAPITRE I</p> | | <p>ABRÉGÉ DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS ÉLIE CARTAN</p> |
| <p>hypothèse sur ω. Pour rappel, puisque $\nu(T)$ appartient à l'image de η et que ω est surjective sur l'image de η ainsi qu'injective, $\omega^{-1}(\omega)$ est bien en tout point de X univoquement défini.</p> <p>Par complétude, le flot de W est complet. Disons qu'il s'agit de ϕ. Mais $\gamma'(t) \rightarrow \omega$, et donc $\phi \rightarrow \phi$ mais ϕ n'explose pas, et donc γ ne peut pas diverger, ce qui est absurde. Donc η est bien développable globalement.</p> <p>Par conséquent, si (X, g, ω) est une variété à forme de Cartan et si M une variété lisse munie d'une 1-forme η à valeurs dans g. Alors, si ω est surjective sur l'image de η en chaque fibre de TX existe une application de développement des chemins</p> $D: A(M) \rightarrow A(X), \quad (84)$ <p>où $A(Z)$ désigne l'ensemble des chemins $\gamma: [0, 1] \rightarrow Z$ d'une variété Z. Pour cela, il suffit de fixer un point de X depuis lequel tous les développements sont basés.</p> <p>Cela fournit également une application de point final de cette développante, qui est la composition naturelle de D avec $\rho: A(X) \rightarrow X$ donnée par $\rho(\gamma) = \gamma(1)$:</p> $E: A(M) \rightarrow X. \quad (85)$ <p>Comme précédemment, il va maintenant s'agir de montrer que de l'application E, nous pouvons en déduire une application $\bar{D}: \bar{M} \rightarrow X$, où nous verrons \bar{M} comme l'ensemble des chemins partageant une même base et à homotopie près. Pour cela, il nous faut le résultat suivant.</p> <p>PROPOSITION I.30 Soit (X, g, ω) une variété à forme de Cartan. Soit M une variété lisse munie d'une 1-forme η à valeurs dans g qui vérifie l'équation de structure. De plus, supposons que ω est surjective sur l'image de η sur chaque fibre de TX.</p> <p>Soit $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ une homotopie lisse aux extrémités fixées entre les chemins $H(0, t) = \gamma(t) = H(1, t) = \mu(t)$. Soit $x \in X \in D(\eta)$, $D(\eta)$ les développements des chemins basés en $x \in X$. Alors $E(\gamma) = E(\mu)$.</p> <p>PREUVE. Soit $T \in [0, 1]$. Alors H fournit un chemin $H(s, T)$ entre les points $\gamma(T)$ et $\mu(T)$. En particulier, pour $T = 1$, $H(s, 1)$ est un chemin (qui est en fait stationnaire) entre $\gamma(1)$ et $\mu(1)$. Ainsi le développement de $H(s, 1)$ dans X basé en x n'importe quel point, donne toujours le chemin stationnaire. Il suffit donc de démontrer que H est globalement développable en $\bar{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ cela montrera que $E(\gamma) = E(\mu)$ puisque la dérivée est nulle lorsque $t = 1$.</p> <p>Considérons la 1-forme $\bar{\eta}$ définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Elle vérifie l'équation de structure puisque c'est le cas de η. Par complétude, ω est encore surjective sur l'image de $H^* \eta$. Il existe donc une intégrale locale maximale pour l'inclusion $\bar{H}: U \rightarrow X$ telle que $\bar{H}^* \omega = H^* \eta$, avec $U \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Par l'absurde, nous supposons $U \neq [0, 1] \times [0, 1]$.</p> <p>Cette intégrale peut être choisie unique en spécifiant $\bar{H}(0, 0) = \gamma(0) = \mu(0)$. Et nous savons déjà que les restrictions $\bar{H}(0, t) = \gamma(t)$ et $\bar{H}(1, t) = \mu(t)$ sont pleinement développées en $D(\gamma)$ et $D(\mu)$ (par unicité). Supposons que $(s, T) \in \partial U \setminus U$. Cela signifie qu'il n'y a pas de développement possible de \bar{H} en (s, T). En réalité, $H(s, T) = \rho(s)$ est développable en tant que chemin.</p> <p>Développons H en $\bar{H}' : V \rightarrow X$ autour de (s, T) en spécifiant $\bar{H}'(s, T) = D(\rho)(s)$. Nous avons $\bar{H}'(0, T) = \bar{H}(0, T)$. Par unicité, cela montre que $\bar{H}' = \bar{H}$ sur $V \cap U$. Donc en réalité U n'est pas maximal, ce qui donne la contradiction attendue.</p> <p>Par conséquent, le développement de deux chemins de M ne dépend pas de leur classe d'homotopie. Pour chaque chemin γ de M basé en x, nous avons $D(\gamma)' \omega = \gamma^* \eta$. Par le résultat précédent, cela ne dépend plus de la classe d'homotopie et définit donc une application entre \bar{M} et X.</p> | <p>x</p> | <p>COROLLAIRE I.31 (Développante de Cartan et intégration globale) Soit (X, g, ω) une variété à forme de Cartan. Soit M une variété lisse connexe munie d'une 1-forme η à valeurs dans g et qui vérifie l'équation de structure. De plus, supposons que ω est surjective sur l'image de η sur chaque fibre de TX. Fixons $p \in M$ et $x \in X$. Regardons le revêtement universel $\bar{M} \rightarrow M$ comme l'ensemble des classes d'homotopie pris relative aux extrémités des chemins basées en p. Nous obtenons les faits suivants.</p> <p>(1) Il existe une unique application lisse — appelée développante de Cartan —</p> $D: \bar{M} \rightarrow X \quad (86)$ <p>qui à un chemin dans M basé en p associe le point final du chemin développé dans X basé en x. De plus</p> $D^* \omega = \eta. \quad (87)$ <p>(2) La développante de Cartan $D: \bar{M} \rightarrow X$ est un difféomorphisme local si, et seulement si, ω et η ont même rang.</p> <p>(3) Si M est simplement connexe, alors $\bar{M} = M$ et la développante de Cartan est une intégrale globale de η. Elle est unique sous la condition $D(p) = x$.</p> <p>II.2 TROISIÈME THÉORÈME DE LIE</p> <p>Comme nous l'avons discuté en introduction, la preuve que nous allons proposer du troisième théorème de Lie va utiliser le théorème d'Ado¹³: toute algèbre de Lie réelle g a une représentation fidèle $g \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, avec V un espace vectoriel réel.</p> <p>Nous ne reprendrons pas le théorème d'Ado, mais justifions tout de même les deux phénomènes suivants. Le premier montre que deux groupes de Lie simplement connexes qui ont la même algèbre de Lie sont en fait difféomorphes. Le deuxième phénomène est celui du passage d'un sous-algèbre de Lie à un sous-groupe.</p> <p>PROPOSITION I.32 Soient G et H deux groupes de Lie, avec G simplement connexe. Tout morphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est induit par un unique morphisme de groupes de Lie $\Phi: G \rightarrow H$.</p> <p>PREUVE. La composition $\omega = \varphi \circ \psi$ donne une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{h} qui vérifie elle aussi l'équation de structure. Par intégrabilité globale, elle est la dérivée de Darboux d'une unique fonction lisse $\Phi: G \rightarrow H$ qui peut être prise telle que $\Phi(e_G) = e_H$ et $\Phi^* \omega_H = \omega$. En dérivant, pour $g \in G$ fixé, $f(x) = \Phi(g)^{-1} \Phi(g, x)$, nous constatons que $f^* \omega_H = \omega$ et $f(e) = e$. Donc $f = \Phi$, ce qui montre que Φ est bien un morphisme de groupes.</p> <p>PROPOSITION I.33 Soit G un groupe de Lie avec pour algèbre de Lie \mathfrak{g}. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un unique sous-groupe connexe $H \subset G$ ayant \mathfrak{h} comme algèbre de Lie.</p> <p>PREUVE. Nous considérons la distribution $\omega_H^{-1}(\mathfrak{h})$. Elle est de rang constant. Si $\omega_G(X) \in \mathfrak{h}$ et $\omega_G(Y) \in \mathfrak{h}$ alors nous avons aussi $d\omega_G(X, Y) = -[\omega_G(X), \omega_G(Y)] \in \mathfrak{h}$ puisque \mathfrak{h} est une algèbre de Lie. Donc cette distribution est intégrable et fournit H en prenant l'unique feuille maximale et l'élément neutre. La loi de groupe de H étant donnée par celle de G.</p> <p>Considérons une algèbre de Lie réelle g. En suivant les commentaires introductifs, si nous commençons avec une variété lisse M et une 1-forme ω à valeurs dans g qui vérifie l'équation de</p> |
| <p>20</p> | | <p>21</p> <p>t</p> |

1. Le calcul

FIGURE 1.1. – Maquette d'empagement

Soit x la marge de gauche (petit fond), y la marge du haut (blanc de tête), z la marge de droite (grand fond) et t la marge du bas (blanc de pied).

Nous avons l'équation $z = 2x$ en raison du fait que sur une double page, le blanc central (donc deux fois le blanc du petit fond) doit être égal à chaque blanc latéral.

Pour avoir un alignement de la diagonale partant du bas extérieur vers le haut intérieur avec le bloc de texte, il faut que les rectangles de blancs le long de cette diagonales aient comme proportion celle de la page. Nous avons donc l'équation

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{2x} = \frac{H}{L}$$

Cela montre que $t = 2y$.

Il reste à déterminer x ou y (ils se déterminent réciproquement). Toutes les valeurs sont possibles ici.

Une qualité visuelle que l'on peut demander consiste à avoir, sur une double page, autant de blanc horizontalement que de bloc de texte sur chacune des pages. En d'autres termes, le blanc horizontal qui mesure $2 \cdot 3x = 6x$ doit être égal à la longueur du bloc de texte, à savoir $L - 3x$.

Nous en déduisons $x = L/9$ et donc $y = H/9$. *C'est l'empagement par neuf.*

Voilà ce n'était pas difficile. Un calcul simple montre que pour avoir une disposition harmonieuse (il y en a d'autres, mais celle-là est très simple) consiste à prendre $x = L/9$ et $y = H/9$ comme blancs de gauche et de tête, et de prendre leur double pour les autres.