



L'arbre de Stern-Brocot : énumération des rationnels

12 août 2019

Table des matières

1.	La méthode de Cantor	2
2.	Dessine-moi un arbre!	3
2.1.	La bijection promise	4
3.	Toujours plus loin	5
3.1.	Rationnel à un rang donné	6
3.2.	Successeur d'un rationnel	7
	Contenu masqué	8

Achille Brocot, horloger de son état, introduisit en 1860 un arbre binaire particulier, aujourd'hui appelé « arbre de Stern-Brocot », avec l'aide duquel il souhaitait approximer tout réel par des rationnels aux numérateur et dénominateur limités. Cette restriction lui permettrait d'effectuer l'approximation dans ses horloges, avec des engrenages comportant peu de dents donc simples à fabriquer.

Bien plus tard, en 1999, Calkin et Wilf se basèrent sur cet arbre pour démontrer la dénombrabilité¹ de \mathbf{Q} . En 1999 ? Mais Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp de son petit nom, 1845-1918, mathématicien allemand) avait pourtant clos le sujet à la fin du 19^{ème} siècle. Non sans remous d'ailleurs, puisqu'il paraissait en ces vieux temps aberrant que \mathbf{Q} , dense dans \mathbf{R} , puisse comporter autant d'éléments que \mathbf{N} .

Pour comprendre cette indignation, il faut assimiler la notion de *densité d'un ensemble dans un autre*. « \mathbf{Q} dense dans \mathbf{R} » signifie qu'entre deux réels distincts quelconques, il existe une infinité de rationnels. Par exemple, il existe une infinité de rationnels entre $\sqrt{2}$ et π , entre 0.00011 et 0.00012... Notamment, il en existe une infinité entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3... ce qui n'a pas empêché Cantor de prouver qu'il y avait autant de nombres rationnels que d'entiers naturels !

i

Pour suivre cet article, il vous faut être à l'aise avec les ensembles et les fonctions, ainsi qu'avec l'arithmétique, principalement la notion de deux nombres premiers entre eux. Connaître le principe des arbres binaires est aussi nécessaire.

Il est utile de connaître les notions de dénombrabilité et de bijectivité, car elles ne seront que brièvement expliquées. Toutefois, les définitions fournies ici devraient suffire. Maîtriser le principe de récurrence vous permettra de comprendre l'ensemble des démonstrations. Pour information, l'article est purement mathématique et n'est rattaché à aucune application de la vie courante. Les objectifs sont au nombre de trois :

- Vous introduire à la notion de dénombrabilité, avec l'exemple surprenant de \mathbf{Q} ;
- Vous faire découvrir la structure qu'est l'arbre de Stern-Brocot ;
- Vous faire manipuler des arbres binaires, notamment au travers de récurrences.

1. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il comporte autant d'éléments que \mathbf{N} , c'est-à-dire si on peut énumérer ses éléments : le premier, le deuxième, le troisième, etc.

1. La méthode de Cantor

Pour démontrer ce résultat surprenant, Cantor commença par considérer \mathbf{N}^2 comme une grille puis attribuer à chaque point deux coordonnées. Parcourir cette grille selon des diagonales nous permet alors de définir une bijection² entre $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ et \mathbf{Q}^+ .



FIGURE 1. – Quadrillage du plan et parcours suivant des diagonales

Plus formellement, pour $n \geq 1$, la $n^{\text{ème}}$ diagonale est l'ensemble suivant :

$$\{(i, j) \in \mathbf{N}^2, i + j = n\}.$$

En ne conservant que les termes d'indice de colonne non nul et premier avec l'indice de ligne, on définit :

$$E := \{(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \mid p \wedge q = 1\}$$

puis l'application suivante :

$$f : E \rightarrow \mathbf{Q}^+ \\ (p, q) \mapsto \frac{p}{q}$$

Par définition de \mathbf{Q}^+ , f est bijective. On a alors successivement :

- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, produit cartésien de deux ensembles dénombrables, est dénombrable ;
- E , partie infinie d'un tel ensemble, est dénombrable ;
- \mathbf{Q}^+ , en bijection avec E , est dénombrable ;
- \mathbf{Q}^- est dénombrable par passage aux opposés ;
- \mathbf{Q} , réunion de deux ensembles dénombrables, est dénombrable.

Il est donc effectivement possible d'énumérer les rationnels. Seulement, le faire de cette manière ne permet de prévoir simplement ni le $n^{\text{ème}}$ rationnel, ni même le successeur d'un élément donné. Heureusement, Calkin et Wilf parviennent à se servir de l'arbre de Stern-Brocot pour retrouver le résultat de Cantor et pallier ses manques³.

2. Une bijection est une application $f : E \rightarrow F$ telle que tout élément de F admette exactement un antécédent par f . Autrement dit, une telle application permet de relier un à un les éléments de E à ceux de F . f est dite *bijection* et E et F en *bijection*. De tels ensembles ont alors même nombre d'éléments.

3. Ceux du résultat, pas de Cantor. Comprenons-nous bien : ce mec était une machine.

2. Dessine-moi un arbre!

2. Dessine-moi un arbre!

Pour dresser l'arbre de Stern-Brocot, partons de la racine : $\frac{1}{1}$. Puis prenons pour fils gauche $\frac{1}{1+1}$ et pour fils droit $\frac{1+1}{1}$. Plus généralement, on définit le fils gauche d'un noeud $\frac{i}{j}$ par $\frac{i}{i+j}$ et le fils droit par $\frac{i+j}{j}$. Ainsi, un noeud N a pour fils gauche $\frac{N}{1+N}$ et pour fils droit $1 + N$. On obtient alors l'arbre suivant :



FIGURE 2. – Arbre de Stern-Brocot

Il est clair que cet arbre ne contient que des rationnels strictement positifs et que 1 n'apparaît qu'à la racine. En outre, pour tout noeud $N = \frac{i}{j}$, on a directement :

- $i = j$ *i.e.* $N = 1$ si le noeud est la racine ;
- $i < j$ *i.e.* $N < 1$ si le noeud est un fils gauche ;
- $i > j$ *i.e.* $N > 1$ si le noeud est un fils droit.

Introduisons maintenant plusieurs résultats dont nous nous servirons par la suite et dont les démonstrations sont intéressantes puisqu'elles constituent des exemples de récurrence sur un arbre binaire⁴.

Lemme

Si $\frac{i}{j}$ est un noeud de l'arbre, i et j sont premiers entre eux.

Démonstration

⊙ Contenu masqué n°1

Lemme

Deux noeuds $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ayant des fils gauches (ou droits) identiques vérifient $a = c$ et $b = d$.

Démonstration

4. On parle d'*induction structurelle*.

2. Dessine-moi un arbre!

⊙ Contenu masqué n°2

Lemme

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout noeud N de l'arbre, le noeud provenant d'une suite de k fils gauches du noeud N est $\frac{N}{1+kN}$.

Démonstration

⊙ Contenu masqué n°3

Remarque

On conclut de manière analogue que le noeud provenant d'une suite de k fils droits du noeud N est $N+k$.

2.1. La bijection promise

Pour établir la dénombrabilité de \mathbf{Q}^+ , définissons une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en posant $v_0 = 0$ puis en effectuant un parcours en largeur de l'arbre : niveau par niveau, de gauche à droite.



FIGURE 2. – Parcours en largeur de l'arbre, aussi appelé parcours militaire.

Ainsi, $v_1 = \frac{1}{1}$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{2}{1}$, $v_4 = \frac{1}{3}$, etc.

Cette suite peut paraître sans intérêt de prime abord, et pourtant :

Théorème

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une bijection de \mathbf{N} dans \mathbf{Q}^+ .

Démonstration

3. Toujours plus loin

© Contenu masqué n°4

Nous avons donc retrouvé le résultat de Cantor à l'aide de l'arbre de Stern-Brocot. Il est temps maintenant d'introduire un personnage : Stern.

3. Toujours plus loin

Ce que l'on souhaite à présent, ce sont des méthodes pour déterminer facilement le $n^{\text{ème}}$ rationnel dans l'énumération et le successeur d'un rationnel donné. Pour cela, reprenons notre arbre et dressons la liste des numérateurs des noeuds : 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4... Cette liste forme en fait la suite de Stern⁵, introduite en 1858 par Moritz Stern (1807-1894, mathématicien allemand). On notera que la liste des dénominateurs des noeuds forme la suite de Stern privée de son premier terme, ce que nous prouvons plus bas.

Cette suite (s_n) , au nombre de propriétés tout à fait incroyable, est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, s_{2n} = s_n \\ \forall n \geq 1, s_{2n+1} = s_n + s_{n+1} \end{array} \right.$$

Le théorème suivant nous fournit une expression simple des termes de la suite, lesquels nous permettront par la suite d'obtenir facilement le $n^{\text{ème}}$ rationnel de l'énumération.

Théorème

$$\forall n \in \mathbf{N}, s_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-k}{k} \bmod 2 \right]$$

où $x \bmod 2$ désigne le reste de la division euclidienne de $x \in \mathbf{R}$ par 2. Autrement dit, pour $n \geq 1$, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Stern est le nombre d'entiers impairs sur la $n^{\text{ème}}$ diagonale du triangle de Pascal :

<http://zestedesavoir.com/media/galleries/1814/>

5. Cela est confirmé par l'[OEIS](#) [↗](#) .

3. Toujours plus loin

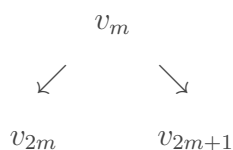
FIGURE 3. – La suite de Stern se lit sur le triangle de Pascal.

3.1. Rationnel à un rang donné

Les termes de la suite de Stern s'avèrent simples à calculer et vont nous permettre de facilement déterminer le rationnel à un rang donné. Commençons par le résultat suivant, important.

Proposition

Si $n = 2m$, v_n est le fils gauche de v_m . De même, si $n = 2m + 1$, alors v_n est le fils droit de v_m .



Démonstration

⊙ Contenu masqué n°5

Ce résultat est notamment utilisé dans le [tri par tas](#) et va nous servir à démontrer le théorème suivant, lequel va nous permettre d'exprimer le $n^{\text{ème}}$ rationnel de l'énumération en fonction de termes de la suite de Stern, termes dont nous avons fourni une expression ci-dessus.

Théorème

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n = \frac{s_n}{s_{n+1}}$$

Démonstration

⊙ Contenu masqué n°6

3. Toujours plus loin

3.2. Successeur d'un rationnel

Le second problème de la méthode de Cantor auquel nous souhaitons remédier est la détermination du successeur d'un rationnel. Le théorème suivant s'avère alors être une aubaine pour nous, puisqu'il fournit une expression de v_{n+1} en fonction de v_n .

Théorème

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{1}{1 + 2\lfloor v_n \rfloor - v_n}$$

Démonstration

© Contenu masqué n°7

Nous avons commencé par un résultat surprenant : la dénombrabilité de \mathbf{Q} , suivie de la méthode historique pour démontrer ce résultat. Puis, afin de pallier aux limitations de cette méthode, l'arbre de Stern-Brocot a été introduit. Cela a été l'occasion pour le lecteur d'effectuer des récurrences sur un arbre binaire.

Les curieux pourront consulter les ressources suivantes et se renseigner sur l'incroyable suite qu'est celle de Stern.

- [Suites de Stern et énumération de rationnels](#) ↗
- [La suite de Stern-Brocot, sœur de Fibonacci](#) ↗
- [Achille Brocot, mathématicien à ses heures](#) ↗
- [Approximation rationnelle des réels avec l'algorithme de Stern-Brocot](#) ↗
- [Addition des cancre, suites de Brocot et friandises associées.](#) ↗

Concernant les images et leurs crédits :

- Le triangle de Pascal mettant en avant la suite de Stern a été adapté d'[ici](#) ↗ .
- Le logo de l'article provient de Hiteshsaldi, sur [Wikicommons](#) ↗ . Il est placé sous licence CC BY-SA.
- Le reste a été créé pour les besoins de l'article et est placé dans le domaine public.

Un grand merci à Holosmos, Saroupille et Looping pour leur relecture attentive, ainsi qu'à Algue-Rythme, validateur dévoué.

Contenu masqué

Contenu masqué n°1

Le numérateur et le dénominateur de la racine $1/1$ sont clairement premiers entre eux.

Prenons i/j un noeud quelconque de l'arbre, c'est-à-dire (i, j) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$. On a alors :

$$(i + j) \wedge j = i \wedge (i + j) = i \wedge j.$$

Ainsi, si i et j premiers entre eux, le fils gauche $\frac{i}{i+j}$ du noeud $\frac{i}{j}$ la vérifie, de même que le fils droit $\frac{i+j}{j}$.

Par induction structurelle sur le niveau d'exploration de l'arbre, on en déduit le lemme. [Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°2

Prenons deux noeuds a/b et c/d ayant tous deux pour fils gauche p/q .

Par définition :

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

Donc, on a successivement :

- $a(c+d) = c(a+b)$
- $ac + ad = ac + cb$
- $ad = cb$
- $a/b = c/d$ car $b, d \neq 0$

Mais ces deux fractions sont irréductibles donc $a = c$ et $b = d$.

On conclut de même dans le cas où les fils droits sont identiques. [Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°3

Prenons N un noeud de l'arbre.

Le premier fils gauche de N est son fils gauche $\frac{N}{1+N} = \frac{N}{1+1 \times N}$. Donc on a le résultat pour $k = 1$.

Prenons $k \in \mathbf{N}^*$ tel que le noeud provenant d'une suite de k fils gauches du noeud N soit $\frac{N}{1+kN}$.

Alors le fils gauche de ce noeud est :

$$\frac{\frac{N}{1+kN}}{1+\frac{N}{1+kN}} = \frac{N}{1+kN} \times \frac{1}{1+\frac{N}{1+kN}} = \frac{N}{1+kN+N} = \frac{N}{1+(k+1)N}.$$

Par principe de récurrence, le lemme est vérifié.

[Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°4

Tout d'abord, (v_n) est bien définie sur \mathbf{N} et à valeurs dans \mathbf{Q}^+ , par définition de l'arbre. Prouvons maintenant qu'elle est surjective puis injective.

— La surjectivité

La surjectivité est équivalente au fait que tout nombre rationnel strictement positif apparaît dans l'arbre. Supposons que ce ne soit pas le cas et, parmi les rationnels strictement positifs n'apparaissant pas dans l'arbre, prenons-en un $\frac{p}{q}$ de dénominateur positif minimal.

Comme 1 est dans l'arbre, $p \neq q$.

Si pq , $\frac{p}{q-p}$ a un dénominateur plus petit et positif donc apparaît dans l'arbre. Mais le fils gauche de $\frac{p}{q-p}$ est $\frac{p}{q-p+p} = \frac{p}{q}$, ce qui est absurde puisque $\frac{p}{q}$ est absent de l'arbre par hypothèse.

On conclut de même dans le cas $p > q$.

— L'injectivité

L'injectivité est équivalente au fait qu'aucun nombre rationnel apparaît deux fois dans l'arbre. Par l'absurde, prenons $\frac{p}{q}$ apparaissant plusieurs fois dans l'arbre et de dénominateur positif minimal.

Il a été vu plus haut que 1 n'était présent qu'à la racine, donc $p \neq q$. Si pq , on a :

$$\begin{array}{ccc} & \frac{p}{q-p} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \frac{p}{q} & & \frac{q}{q-p} \end{array}$$

Cet arbre sous-entend que $\frac{p}{q-p}$ est le seul père possible pour $\frac{p}{q}$. Heureusement, c'est le cas, puisque $\frac{p}{q-p}$ est un père valable pour $\frac{p}{q}$ et deux noeuds ayant des fils gauches (ou droits) identiques ont les mêmes numérateur et dénominateur.

Donc, puisque $\frac{q}{q-p} \neq \frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ apparaît au moins une fois comme enfant d'un autre noeud, c'est-à-dire que $\frac{p}{q}$ apparaît plusieurs fois dans l'arbre, ce qui contredit la minimalité du dénominateur.

On conclut de même dans le cas $p > q$.

On en conclut que (v_n) est bijective puis que \mathbf{Q}^+ est dénombrable et que \mathbf{Q} l'est. [Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°5

En considérant que la racine est au niveau 0, on obtient facilement que le $n^{\text{ème}}$ niveau de l'arbre comporte 2^n éléments et que l'élément le plus à gauche a pour numéro 2^n .

Prenons alors $m \geq 1$ et notons N le noeud numéroté par m dans notre parcours en largeur. n désignera le niveau auquel se positionne N .

Il y a $m - 2^n$ noeuds à gauche et sur le même niveau que N et $2^{n+1} - m$ à sa droite. Chaque noeud à sa gauche ayant deux fils, le fils gauche de N aura pour numéro $m + 2(m - 2^n) + (2^{n+1} - m) = 2m$. Le numéro du fils droit est alors $2m + 1$.

On en conclut la proposition.

[Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°6

Tout d'abord $v_0 = 0 = \frac{0}{1} = \frac{s_0}{s_1}$ et $v_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{s_1}{s_2}$. Le résultat est donc vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$.

Prenons m dans \mathbf{N} tel que $v_m = \frac{s_m}{s_{m+1}}$.

Alors, pour $n = 2m$, v_n est le fils gauche de v_m et on a :

$$v_n = \frac{s_m}{s_m + s_{m+1}} = \frac{s_{2m}}{s_{2m+1}} = \frac{s_n}{s_{n+1}}.$$

De même, si v_n est le fils droit de v_m , $n = 2m + 1$ et on a :

$$v_n = \frac{s_m + s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{s_{2m+1}}{s_{2(m+1)}} = \frac{s_n}{s_{n+1}}.$$

Par induction structurelle, on en conclut le théorème.

[Retourner au texte.](#)

Contenu masqué n°7

On a bien : $f(v_0) = f(0) = 1 = v_1$ et $f(v_1) = f(1) = \frac{1}{2} = v_2$.

— Prenons, pour $m \geq 1$, $n = 2m$ pair.

Alors $s_n < s_{n+1}$ car $s_n = s_{2m} = s_m$ et $s_{n+1} = s_m + s_{m+1}$. D'où

$$f(v_n) = f\left(\frac{s_n}{s_{n+1}}\right) = \frac{1}{1 + 2 \left[\frac{s_n}{s_{n+1}} \right] - \frac{s_n}{s_{n+1}}} = \frac{1}{1 - \frac{s_n}{s_{n+1}}} = \frac{s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n} = \frac{s_{n+1}}{s_{m+1}} = \frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = v_{n+1}.$$

Donc $v_{n+1} = f(v_n)$.

— Prenons, pour $m \geq 1$, $n = 2m + 1$ impair et supposons que v_n ne soit pas au bord droit de l'arbre.

Contenu masqué

Alors v_n et v_{n+1} ont un ancêtre commun, noté v_p , $k + 1$ niveaux au-dessus d'eux, $k \geq 1$, et v_n provient d'une suite de k fils droits du fils gauche de v_p tandis que v_{n+1} d'une suite de k fils gauches du fils droit de v_p .



FIGURE 3. – Ici, $k = 1$.

Mais le fils droit d'un noeud N est $1 + N$ et son fils gauche est $\frac{N}{1+N}$.

Donc $v_n = k + \frac{v_p}{1+v_p}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_p}{1+k(v_p+1)}$. Mais :

$$\frac{1 + v_p}{1 + k(v_p + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{v_p + 1} + k} = \frac{1}{1 - \frac{v_p}{v_p + 1} + k} = \frac{1}{1 - v_n + 2k} = \frac{1}{1 + 2[v_n] - v_n}.$$

Donc $v_{n+1} = f(v_n)$.

— Prenons, pour $m \geq 1$, $n = 2m + 1$ impair et supposons que v_n soit au bord droit de l'arbre.

Notons $k \geq 1$ tel que v_n provienne d'une suite de k fils droits en partant de la racine. Alors v_{n+1} provient d'une suite de $k + 1$ fils gauches en partant de la racine.



FIGURE 3. – Là, $k = 2$.

On a alors $v_n = [v_n] = k + 1$. Mais $v_{n+1} = \frac{1}{1+(k+1)}$.

Donc $v_{n+1} = f(v_n)$.

En somme, le théorème est vérifié.

[Retourner au texte.](#)